This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Die

Polygonometrie

und deren Anwendung

auf

Vermessung, Berechnung, Zeichnung, Grenzregulirung und Theilung großer Waldungen,

nebst Anleitung

zum trigonometrischen Höhenmessen.

Von

Joh. Phil. Ernst Ludwig Jäger,

Fürstlich Wittgenstein'schem Forstdirector ꝛc.

Mit fünf Figurentafeln.

Marburg.

N. G. Elwert'sche Universitäts-Buchhandlung.

1860.

183. a. 24.

BIBLIOTHECA · BODLEIANA

Vorrede.

Nachdem man die Unsicherheit der Bouſſolen-Meſſung faſt allgemein erkannt hat, wird dieſes Inſtrument zum Winkelmeſſen bei größeren Vermeſſungen immer mehr beſeitigt und in nicht langer Zeit durch beſſere Winkelmeßinſtrumente wohl gänzlich verdrängt werden *).

In denjenigen Staaten, wo die allgemeine Landesvermeſſung bereits Fortgang genommen hat, kommen Bouſſolenmeſſungen faſt nicht mehr vor, entweder, weil ſie förmlich unterſagt ſind, oder weil das ausübende Perſonal dieſelben ihrer Unſicherheit wegen, ſelbſt aufgegeben hat, und es vorziehet, die Winkelmeſſungen mit guten Inſtrumenten, namentlich dem Theodolithen, auszuführen.

*) Die Unſicherheit der Bouſſolenmeſſung beruhet nicht allein auf der Unzuverläſſigkeit der Winkelmeſſung, welche zu ½ Grad für jeden Winkel angenommen werden kann, ſondern auch auf der Veränderlichkeit des magnetiſchen Meridians, auf dem Einfluß der Elektricität, der Wärme, der Kälte, des Windes und Wetters, des Nordlichts, beſonders auch auf der Nähe von Eiſenerzen, Serpentin, Granit, ja es zeigen ſich ſogar ſchon Veränderungen auf Torfboden und in Kieferwaldungen.

Mit Recht wird der Gebrauch der Bouſſole zu Winkelmeſſungen da unterſagt, wo man richtige Karten und genauen Flächeninhalt verlangt und die Vermeſſung der einzelnen Ortsgemarkungen an die allgemeine Landesvermeſſung anſchließt, um die Arbeiten im Einzelnen mit dem Ganzen in Verbindung zu bringen.

Im Königreiche Preußen ſtehet die Anfertigung neuer Cataſter für die ſechs öſtlichen Provinzen bevor, wobei ſich die Anwendung des Theodolithen zum Meſſen der Winkel und die polygonometriſche Berechnung der Haupt- und Hülfspunkte wohl Geltung verſchaffen wird.

Auch die Vermeſſung der Waldungen wird nach anderen, als den bisherigen Normen vorgenommen werden, denn es muß ſich dieſelbe dem allgemeinen Cataſter anſchließen und deßhalb nach wiſſenſchaftlichen Principien vollzogen werden.

Dieſes im Auge habend, und um den Beweis zu liefern, daß eine ſtreng wiſſenſchaftliche Behandlung der Forſtvermeſſungen bei gehöriger Kenntniß des hierbei vorkommenden Rechnungsverfahrens keinen namhaft größeren Zeitaufwand erfordert, als das mechaniſche Verfahren mit der Bouſſole und dem Meßtiſche, habe ich mich entſchloſſen das vorliegende Werkchen über Polygonometrie auszuarbeiten und in die Welt zu ſchicken.

Möge ſich das Büchelchen Freunde bei Allen erwerben, welche ſich für die praktiſche Meßkunſt intereſſiren und

Sinn für ſtreng mathematiſche Berechnungen haben. Es ſetzt Kenntniß der ebenen Trigonometrie und Bekanntſchaft im algebraiſchen Rechnen, ſonſt aber keine tieferen mathematiſchen Kenntniſſe voraus.

Die vorgetragenen Lehr- und Hülfsſätze habe ich ſtets durch Beiſpiele erläutert, um das oft ſchwierige Rechnungsverfahren anſchaulich zu machen, und bin hierin von den modernen Schriftſtellern über Vermeſſungskunſt, welche ihre Sätze meiſt ganz nackt hinſtellen, abgewichen. Langjährige Erfahrung ſpricht ſich für die Durchführung von Beiſpielen, ſonach für den Nachweis der Anwendung der wiſſenſchaftlichen Lehre aus.

Wenn es richtig iſt, daß nur ein Mann vom Fache eine gute Anleitung zum Vermeſſen, Berechnen, Zeichnen und Theilen von Waldungen geben kann, ſo darf ich mir wohl ſchmeicheln, ein brauchbares Werkchen geliefert zu haben. Was ich vorgetragen und gelehrt, habe ich mehr oder weniger bereits vor 35 Jahren, wo ich fünf Jahre anhaltend mit Forſtvermeſſungen, Forſttaxationen und Waldtheilungen beſchäftigt war, und auch in ſpäteren Jahren, wo mir mehrfach die Leitung größerer Forſtvermeſſungen ꝛc. übertragen war, häufig angewendet. Viele Formeln habe ich ſelbſtſtändig entwickelt, und wenn ich mir auch nicht ſchmeicheln will, neue mathematiſche Wahrheiten entdeckt zu haben, ſo darf ich doch bemerken, daß dasjenige, was ich

im §. 11 über die Vereinfachung der Grenzen, im §. 12 über die routenweise Höhenbestimmung, im §. 13 über Waldtheilungen vorgetragen habe, größtentheils mein eigen ist. Mein Bestreben, Deutlichkeit im Vortrag mit mathematischer Kürze zu vereinigen, werden Sachkenner von selbst finden.

Daß ich bei Ausführung der Berechnungen die alte Kreiseintheilung zum Grunde gelegt habe, geschah deßhalb, weil dieselbe im nördlichen Deutschland meist noch gebräuchlich ist. Ich verkenne die Vortheile der Decimaltheilung keineswegs, und wünsche, daß dieselbe bald allgemein eingeführt werden möge, indem das Rechnungsverfahren nach dieser viel einfacher ist, als nach jener.

Ob sich das vorliegende Werkchen, dessen Preis der Herr Verleger mit Rücksicht auf Ausstattung möglichst billig gestellt hat, nicht auch als Lehrbuch für Forstakademien empfehle, darüber mögen die Lehrer, welche Forstvermessungskunst vorzutragen haben, entscheiden. Als Vorläufer zum Studium meines Werkchens möchte ich das kürzlich erschienene Handbuch der niederen Geodäsie von Baur, Wien 1858, empfehlen.

Laasphe,
im Juni 1859.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

		Seite
§. 1.	Einleitung und Begriff von Polygonometrie	1
	Vorzüge des Theodolithen zum Winkelmessen	2
	Verfahren dabei und zu erlangende Genauigkeit	4
	Neue oder Centesimaltheilung und alte oder Sexagesimaltheilung	5
	Zur Linienmessung in Waldungen empfiehlt sich die Kette . .	5
§. 2.	Von der Reduktion der Winkel und Berechnung der Azimuthe	6
	Verfahren bei Triangulirungen und zusammenstoßenden Polygonen	9
§. 3.	Von der Berechnung und Zusammenstellung der Coordinaten .	12
	Grundgesetze der Summen aller Ordinaten und aller Abscissen	13
	Durchgeführte Berechnung eines Polygons von 15 Seiten .	15
	Correktur der sich ergebenden Abweichungen	19
	Verhalten bei Correktur der Winkel und Coordinaten bei zusammenstoßenden Polygonen längs der gemeinschaftlichen Route	22
§. 4.	Von der Berechnung des Inhalts	25
	Verfahren bei theilweiser Inhaltsberechnung	26
	Entwickelung allgemeiner Formeln zur Berechnung des Inhalts von Polygonen ohne vorherige Coordinatenberechnung .	30
	Weitläufigkeit und Unsicherheit der Resultate bei Anwendung der allgemeinen Formeln	38
	Beschränkung der Polygone auf einer gewissen Anzahl von Seiten	40
§. 5.	Von dem Auftragen der Coordinaten und dem Zeichnen des Kartennetzes	40

Seite

Die Polygonpunkte werden mittelst zweier Zirkel in das Kartennetz eingetragen 42

§. 6. Von Legung und Berechnung des Dreiecksnetzes; Anschließen an die Landesvermessung 43

1) Lehrsatz über die Gleichheit der Summen der Sinusprodukte bei getheilten Umfangswinkeln 45

2) Ableitung der Azimuthe zur Forstvermessung aus den Coordinaten zur Landesvermessung 48

3) Verfahren bei dem Rückwärtsabschneiden — das Pothenot'sche Problem — aus der Lage von drei Punkten die Lage eines vierten Punktes zu finden 49

4) Anderes Verfahren, sich aus den Resultaten der Landesvermessung aus drei Punkten eine Basis abzuleiten . . 53

5) Aus zwei Punkten der Landesvermessung eine Basis zur Forstvermessung abzuleiten 55

§. 7. Von Berechnung fehlender Stücke und unbekannter Entfernungen 61

1) Verfahren bei zwei fehlenden Seiten und einem fehlenden Winkel 61

2) Verfahren bei einer fehlenden Linie und zwei anliegenden Winkeln (Durchhauen von Schneisen und Theilungslinien in bestimmter Richtung) 64

3) Verfahren bei getrennter Lage der fehlenden Stücke . . 65

4) Verfahren bei zwei getrennt liegenden Seiten 68

5) Verfahren, wenn drei Winkel fehlen, und zwar

a. wenn die fehlenden Winkel auf einander folgen . . . 69

b. wenn dieselben in der Figur zerstreut liegen 70

§. 8. Auffinden von Fehlern in den Coordinaten in Folge fehlerhafter Messung 73

1) Verfahren, wenn bei Messung einer Linie gefehlt worden ist 74

2) Verfahren, wenn bei Messung eines Winkels gefehlt worden 75

§. 9. Messung der äußeren Parcellen 78

a. Wie weit man sich mit den Hülfslinien von der Waldgrenze entfernen dürfe 78

b. Aufnahme der Außenparcellen als Dreiecke und Trapeze 79

c. Von Legung besonderer Dreiecke 79

d. Aufnahme von Wiesengründen, welche zwischen den Waldpolygonen liegen 80

Seite

e. Aufnahme der Waldgrenze durch Schnittpunkte, oder von dem Vorwärtsabschneiden 81
f. Aufnahme der Waldgrenze durch besondere Hülfspolygone 91
g. Berechnung besonderer Außenparcellen 91

§. 10. Messung der Details 94
a. Was besonders heraus zu messen ist 94
b. Verfahren bei den Detailmessungen, namentlich der Routenmessung 98

§. 11. Vereinfachung der Grenzen und Anfertigung des Grenzregisters 100
a. Von der Verwandlung gebrochener Grenzlinien in gerade, bei gleicher Bodengüte 100
b. Von der Verwandlung gebrochener Grenzlinien in gerade bei ungleicher Bodengüte 104
c. Anfertigung eines Grenzregisters nach Grenzlinien und Grenzwinkeln 112

§. 12. Von den Höhenmessungen 116
1) Fall, worauf sich die Höhenmessung eigentlich beschränkt 116
2) Messung einer Berghöhe von der Kuppe des Berges . 117
3) Messung zweier Berghöhen und des horizontalen Abstandes ihrer Spitzen von einer Standlinie 120
4) Von der Correktur der bei den gewöhnlichen Höhenmessungen vorfallenden Fehler 121
a. Berücksichtigung der Höhe des Instrumentes 121
b. Nicht horizontaler Stand desselben 122
c. Abweichung des scheinbaren Horizontes vom wahren 122
d. Irdische Strahlenbrechung oder Refraktion 123
5) Von dem Verfahren bei Anlegung von Straßen, Eisenbahnen, Eisenbahntunnels 125
a. Bei stationsweiser Höhenmessung braucht die Höhe des Instrumentes nicht berücksichtigt zu werden 126
b. Messung der Höhen und Tiefen — Elevations- und Depressions-Winkel von der Mitte der Station aus, wodurch sich viele Fehler aufheben 127
c. Verfahren, wenn in einer bestimmten Richtung durch einen Berg geschlagen und das Steigen und Fallen, nebst der Länge der Durchschlagslinie gefunden werden soll . 128
d. Verfahren, wenn zwei bestimmte Punkte diesseits und jenseits eines Bergrückens durch einen Eisenbahntunnel verbunden werden sollen 132

Seite

§. 13. Von der Waldtheilung 134

Iter Fall. Die Theilungslinie soll in einer bestimmten Richtung vom Umfange ablaufen und mehrere Bonitätsgrenzen durchschneiden 135

a. 1tes Theilungsverfahren, unter Berücksichtigung der Grundlinien und der anliegenden Winkel der verschiedenen Bonitätsklassen 138

b. 2tes Theilunsverfahren, unter Berücksichtigung der gegenüberstehenden Seiten 144

c. 3tes Theilungsverfahren durch Reduktion der verschiedenen Bodenklassen auf eine willkührliche Mittelklasse . . 145

IIter Fall. Die Theilungslinie soll von einem gegebenen festen Punkte ausgehen 147

a. Verfahren bei gleicher Bonität oder Ertragsfähigkeit . . 148

b. Verfahren bei mehreren Bonitätsklassen 148

α. 1tes Theilungsverfahren — indirektes — unter Anwendung der regula falsi 149

β. 2tes Theilungsverfahren unter Reduktion auf eine arithmetisch mittlere Bodenklasse 156

γ. 3tes Theilungsverfahren unter Reduktion auf eine geometrische Bodenklasse 159

IIIter Fall. Eine Waldfläche von zwei verschiedenen Betriebsklassen soll durch eine gerade Linie der Art getheilt werden, daß die Theilstücke ein gegebenes Verhältniß zu einander haben 162

Nachtrag:

I. Ableitung einer Standlinie aus zwei gegebenen Punkten und deren Entfernung, wenn sich die beiden Linien schneiden . 169

II. Zweites Verfahren der Vereinfachung der Grenzen bei verschiedenen Bodenwerthen 173

§. 1.

Einleitung und Begriff.

Die Polygonometrie oder die Meßkunst der Vielecke, hat die Berechnung der senkrechten Abstände der einzelnen Polygonpunkte von einem bestimmten Punkte einer gegebenen Linie, zum Zwecke.

Die senkrechten Abstände der einzelnen, das Polygon bildenden Punkte heißen in der mathematischen Geographie Breiten und Längen, in der praktischen Geometrie aber Coordinaten, die Linie auf welche die Abstände berechnet werden, heißt die Achse und der Punkt von welchem die Berechnungen ausgehen, der Anfangs- oder Nullpunkt.

Die Achse, worauf die Coordinaten eines Polygons berechnet werden sollen, kann willkührlich gewählt werden; sie kann eine Umfangslinie, sie kann aber auch eine Diagonale sein, auch die Figur nur an einem Umfangspunkte berühren, sonst ganz außerhalb derselben liegen.

In denjenigen Staaten, wo die Landesvermessung — Triangulation — bereits Fortschritte gemacht hat, oder schon beendigt ist, werden die Coordinaten meist auf den Meridian einer größeren Stadt berechnet und diese für alle Vermessungen vorgeschrieben, wodurch, wie wir weiter unten sehen werden, der große Vortheil erreicht wird, daß man jeder Fläche, ja jedem Punkte ihre und resp. seine richtige Lage auf der Landeskarte geben kann, weiterhin auch für die Tüchtigkeit der Flurvermessung eine Controle geboten wird, welche für die Detailmessungen unschätzbar ist.

Wo keine bestimmte Achse vorgeschrieben und es dem Geometer überlassen bleibt, seine Polygone willkührlich zu berechnen, wird dieser sich eine Umfangslinie oder meist zweckmäßiger eine Durchschnittslinie oder Diagonale wählen, weil er in diesem Falle mit den kleinsten Zahlen zu rechnen hat, wie dieses im weiteren Verlaufe unseres Vortrages bald klar werden wird.

Obgleich die Berechnung der Längen und Breiten — Coordinaten — in der Polygonometrie die Hauptsache ist, so wird doch gewöhnlich auch eine Berechnung des Flächengehaltes und eine richtige bildliche Darstellung — Kartirung — des Polygons verlangt, weßhalb man den Begriff der Polygonometrie auf die Vermessung, Berechnung und Zeichnung der Vielecke ausdehnen kann und meist ausdehnt. Obgleich schon in der niederen Geometrie gelehrt wird, daß jedes Polygon bestimmt ist, wenn darin nicht mehr als drei Stücke, wobei aber nothwendigerweise ein Winkel sein muß, fehlen, so muß es doch Grundsatz für den ausübenden Geometer sein, wo möglich alle Seiten und alle Winkel der Polygone zu messen, weil er nur hierdurch eine sichere Controle für die Tüchtigkeit seiner Arbeiten erlangen kann. Weil aber demohngeachtet Fälle vorkommen können, wo die unmittelbare Messung einzelner, zum Polygon gehöriger Punkte nicht möglich ist, es auch bei vorgefallenen Fehlern oft sehr wünschenswerth erscheint, zweifelhafte Linien und Winkel aus den übrigen Daten der Vermessung berechnen zu können, so wird auch hierzu weiter unten genügende Anleitung gegeben werden.

Aus dem Begriffe der Polygonometrie gehet schon hervor, daß bei derselben alle Vermessungen ausgeschlossen bleiben, wobei die Winkel nicht nach ihrem Maaße nach Graden, Minuten und Sekunden angegeben werden, sonach alle Messungen mit dem Meßtische, der Zollman'schen Scheibe und dergleichen. Weil nun auch die Bousole die Winkel nicht genau genug angiebt, so bleibt auch diese, obgleich deren Resultate, die Abweichungen vom magnetischen Meridian, sich ganz vorzüglich zu polygonometrischen Rechnungen eignen würden, bei allen größeren und genaueren Vermessungen mit Recht ausgeschlossen und es werden die Winkelmessungen meist ausschließ-

lich mit dem Theodolithen vorgenommen, dessen Bau in neuerer Zeit so außerordentlich vereinfacht, und dessen Eintheilung einen solchen Grad von Genauigkeit erreicht hat, daß man mit kleineren, selbst nur vier Zoll im Durchmesser haltenden Kreisen die Winkel bis auf einzelne Minuten, bei größeren 6 — 8zölligen Kreisen meist bis auf halbe Minuten sicher, und dabei in so kurzer Zeit richtig messen kann, daß man mit einer empfindlichen Bousole meist nicht schneller fertig werden wird.

Da die Eintheilung auf dem Limbus von der rechten nach der linken oder auch von Norden über Osten und Süden nach Westen gehet, so stellt der Geometer nach genau horizontal gestelltem und gut centrirten Instrumente den Vertikal-Faden des Fernrohrs zuerst nach Signal links oder der vorhergehendn Station, beobachtet den Stand des Limbus und der Nonien — bei kleineren Instrumenten zwei gegenüberstehend, bei größeren vier, je um einen rechten Winkel von einander abstehend — und führt dann sein Fernrohr nach Signal rechts oder der nächst folgenden Station, worauf er den Stand des Limbus und der Nonien beobachtet und notirt. Aus dieser kurzen Beschreibung des Verfahrens bei der einfachen Winkelmessung ergiebt sich schon, daß stets die Resultate der ersten Beobachtung von denen der zweiten Beobachtung abgezogen werden müssen, um das Maaß des Winkels zu erhalten. Weil die Resultate bei einer einfachen Beobachtung meist noch nicht ganz sicher sind, so wird die Winkelmessung repetirt, was bei s. g. Repetitionstheodolithen durch Herumführung des ganzen oberen Theiles des Instrumentes bei unverrücktem Stande der Nonien auf das Signal links, sodann durch Oeffnen der oberen Stellschraube des inneren Kreises und durch Führung des Fernrohrs nach Signal rechts geschiehet. Werden in dieser Stellung die Nonien beobachtet und notirt, so hat man nunmehr nach Abzug des ersten Standes der Nonien bei dem Beginne der Messung einmal den doppelten und einmal den einfachen Winkel gemessen.

Bei Forstvermessungen genügt eine Repetition, während bei Winkelbeobachtungen der Landesvermessungen bei Dreiecken I. Ranges

deren Seiten oft bis zu 10 Meilen betragen 20 ja 30fache Repetitionen, bei Dreiecken des II. Ranges, deren Seiten gewöhnlich etwas länger oder kürzer als eine Meile sind, 10 Repetitionen und bei Dreiecken des III. Ranges, deren Seiten meist nur $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}$ Meile lang sind, 2 bis 3 Repetitionen genügen um die Winkel mit dem nöthigen Grad von Schärfe, bei Dreiecken I. Ranges nicht über 5 Sekunden, bei Dreiecken II. Ranges nicht über 20 Sekunden und bei Dreiecken des III. Ranges nicht über $\frac{1}{2}$ Minute Abweichung für jeden einzelnen Winkel, zu erhalten. Bei größeren Forstvermessungen genügt für die äußeren Polygonwinkel eine Genauigkeit von einer halben und für die Winkel im Inneren, für Bestandes- und Bodenverschiedenheiten eine solche von einer ganzen Minute und diese Grenze ist bei Operationen mit einem guten Instrumente, bei der gehörigen Vorsicht im Beobachten und bei Gewandheit im Gebrauche des Instrumentes leicht zu erreichen. Um die Fehler, welche im Instrumente selbst, zum Theil in der Theilung, hauptsächlich aber in der Excentricität desselben liegen zu beseitigen, wird bei dem sogenannten Compensator nach der erſten Beobachtung, bei dem Multiplicator oder Repetitionstheodolithen nach der erſten Repetition das Fernrohr durchgeschlagen, d. h. vorsichtig um seine Achse gedreht und dann in dieser neuen zweiten Lage des Fernrohrs die Winkel wiederholt gemessen. Durch das Durchführen des Fernrohrs zwischen seinen Trägern wird bezweckt, daß jetzt die Messung auf die entgegengesetzte Seite des Instrumentes fällt, wodurch sich etwaige Fehler in der Theilung des Instrumentes zum größten Theile, die der Excentricität aber ganz heben *).

Ob die Winkel mit einem Compensator oder mit einem Multiplicator gemessen werden, bleibt sich ganz gleich, doch wird bei Forstvermessungen meist der Compensator gebraucht, weil man sich

*) Mehr über das Verfahren bei der Winkelmessung zu sagen, läßt im Zweck dieser Schrift nicht zu. Auch läßt sich das Verfahren und alle Vorsichtsmaaßregeln viel leichter zeigen und praktisch erlernen, als beschreiben.

dabei mit zwei Beobachtungen in jeder Lage des Fernrohrs begnügen kann.

In Betreff der Eintheilung der Instrumente ist zu bemerken, daß in den meisten Ländern noch die Sexagesimal-Theilung besteht, während in Frankreich und auch in verschiedenen deutschen Bundesstaaten die Decimaltheilung, d. h. die Theilung des ganzen Kreises in 400 Grade, die des Quadranten in 100 Grade eines jeden Grades in 100 Minuten, einer jeden Minute in 100 Sekunden, eingeführt ist.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß die Berechnungen bei der Centesimaltheilung etwas einfacher werden, indem hier manche Multiplikationen und Divisionen gespart werden. In sonstiger Beziehung kann es selbstverständlich auf die Richtigkeit des Verfahrens von keinem Einfluße sein, ob nach alter oder nach neuer Theilung gemessen und gerechnet wird *).

In Betreff der Linienmessung soll hier nur kurz bemerkt werden, daß bei Forstvermessungen die Kette unbedingten Vorzug vor den Stäben oder Ruthen hat, denn im Gebüsche und Gestrüppe kommt man mit letzteren oft gar nicht fort, während man dasselbe mit der Kette entweder niederschlagen, oft auch die Kette in den Stäben heben und auf das Gebüsch auflegen kann. Desgleichen gehet es dem Geometer bei Bächen, Gräben, Schluchten, Felsen mit Stäben oft erbärmlich schlecht, während er sich mit der Kette immer noch durchhilft. Es muß diese, welche für ebene Gegenden unbedenklich 5 Ruthen oder 60 Pr. Fuß lang sein kann, eine solche Einrichtung erhalten, daß man sie auf 2 und 3 Ruthen abkürzen kann, weßhalb die Abtheilung von 2 und resp. 3 Ruthen mittelst eines großen Wirbels von Messing oder Eisen von solcher Stärke bewirkt werden muß, daß ein Kettenstab durchgesteckt werden

*) An Tafeln, welche nach der neuen Kreistheilung berechnet sind, fehlt es nicht. Eine sehr gute Tafel ist die von Hobert und Ideler in Berlin herausgekommene; minder wichtig ist die kleine Tafel von Plauzoles unter dem Titel: Tables logarithmes portalives. Paris par F. Didot.

kann *). In Gebirgsgegenden wird mit der 2 und resp. 3 Ruthen langen Kette gearbeitet, um dieselbe stets in die horizontale Lage bringen zu können.

Die Linie nach ihrer wahren Länge nach der Böschung zu messen und dann mittelst des gemessenen Elevationswinkels auf den Horizont zu reduciren, gehet theils wegen Umständlichkeit, hauptsächlich aber wegen zu großer Unregelmäßigkeit der Terrainoberfläche, Wellenförmigkeit des Bodens, schwächerer und stärkerer Steigung desselben innerhalb einer und derselben Linie, nicht wohl an, weßhalb der staffelweisen Horizontalmessung unbedingt der Vorzug gebührt.

§. 2.

Von der Reduktion der Winkel und der Berechnung der Azimuthe.

Fig. 1. Nachdem man die Winkel eines Polygons aus den Winkelbüchern berechnet und nach ihrer Anzahl zusammengestellt, auch den die innnerhalb der gestatteten Fehlergrenze verbleibende Ab-

*) Man glaubt nicht wie viel von einer gut gefertigten Kette auf die Richtigkeit der ganzen Messung abhängt, weßhalb die Bemerkung wohl nicht am unrechten Orte ist, daß der Drath zur Kette des Abnutzens wegen nicht unter $\frac{1}{4}$ Zoll stark sein soll, obgleich dadurch die Kette etwas schwer wird, daß die einzelnen Glieder mindestens ein Decimalfuß, also 14 Preußische Zoll lang, daß dieselben an den umgebogenen Enden gut ausgeglüht und von allen Splittern gereinigt, daß die Ringe, selbst die zur Abtheilung von einzelnen Ruthen nicht von Messing, welches sich zu schnell abnutzt, sondern von gutem Schmiedeeisen mit leicht bemerkbaren Unterscheidungen für die Einzelruthen angefertigt; daß die Kettenstäbe, ihrer Haltbarkeit wegen von Eschenholz $1\frac{1}{2}$ Zoll stark gefertigt, und daß dieselben unten nicht konisch beschlagen, sondern mit einer 6 Zoll langen $\frac{1}{2}$ zölligen vierkantigen Spitze, um dieselbe ganz in den Boden einstoßen zu können, beschlagen werden. Die Vortheile bei dem Einvisiren der Kettenstäbe, dem Anziehen, Heben oder Horizontallegen, dem Festhalten derselben, mit einem Worte die Manipulationen und praktischen Vortheile bei dem Messen der Linien, erwirbt man sich nur durch praktischen Umgang mit der Sache selbst, weßhalb auch bei dem Geometer ein praktischer Kursus unerläßlich ist.

weichung meist in gleicher Größe auf die einzelnen Winkel vertheilt hat *), schreitet man zur Berechnung der Azimuthe, d. h. der Abweichungen von den mit der Achse durch jeden Winkelpunkt gezogenen Parallele. Fig. 1.

Es sei nun Fig. 1. ein Polygon von 8 Seiten, worin die inneren Winkel folgende Maaße haben: $< B = 68°$, $C = 234°$, $D = 103°$, $E = 147°$, $F = 123°$, $G = 96°$, $H = 249°$, $A = 60°$.

Die Linie AB werde als Achse angenommen, so ist $< B$ selbst die erste Abweichung oder das erste Azimuth, wenn rechts herum gerechnet werden soll. Man denke sich durch jeden Winkelpunkt Parallelen zu AB gezogen, so sind die punktirten Winkel die Azimuthe für die correspondirenden Punkte.

Diese Winkel werden nun aus den gemessenen inneren Polygonwinkeln folgendermaßen abgeleitet:

$$\begin{aligned}
\text{Az. } B &= \text{Poly. W. B.} \\
\text{Az. } C &= \text{Poly. W. } C - < BCC' = \text{Poly. W. } C - \\
&\quad - 180 + < B. \\
&= B + C - 180°. \\
\text{Az. } D &= D - CDD' = D - 180 + \text{Az. } C \\
&= B + C + D - 2.180°. \\
\text{Az. } E &= E - DEE' = E - 180° + \text{Az. } D \\
&= B + C + D + E - 3.180°.
\end{aligned}$$

Bei dem Punkte F nimmt die Figur eine andere entgegengesetzte Richtung, nämlich sie nähert sich der Achse wieder, während sich die vorhergehenden Punkte von derselben entfernt haben. Das Azimuth dieses Punktes fällt unter die Parallele, während alle vorhergehenden oberhalb derselben lagen. Es findet hiernach das Entgegengesetzte, wie bei den früheren Azimuthen statt, wie sich aus der Ableitung selbst ergiebt, nämlich:

*) Das Verfahren der Fehlervertheilung bei zusammenstoßenden, d. h. solchen Polygonen, welche eine theilweise gemeinschaftliche Grenzroute haben, wird weiterhin noch angegeben werden.

Fig. 1.

$$\text{Az.}\,F = \sphericalangle F + \text{Az.}\,E + 180^0 =$$
$$B + C + D + E + F - 3.180^0 + 180^0 =$$
$$B + C + D + E + F - 2.180^0.$$
$$\text{Az.}\,G = G + G'GF = G + 180^0 - (360^0 - \text{Az.}\,F) =$$
$$G + \text{Az.}\,F - 180^0 =$$
$$B + C + D + E + F + G - 3.180^0.$$
$$\text{Az.}\,H = H + H'HG = \text{Az.}\,G + H - 180^0 =$$
$$B + C + D + E + F + G + H - 4.180^0.$$
$$\text{Az.}\,A = A + A'AH = \mathfrak{A} + \text{Az.}\,H - 180^0 =$$
$$A + B + C + D + E + F + G + H - 5.180^0.$$

Da nun die Summe der Winkel von A bis $H = 6.180^0$ beträgt, so ist $\text{Az.}\,A = 6.180^0 - 5.180^0 = 180^0$, wie aus der Figur zu ersehen ist.

Wie die Figur ferner zeigt, würde man fehlen, wenn man das Az. F deßhalb, weil von der Summe des Azimuths E und dem Polygonwinkel F die Summe von 2 R. nicht abgezogen werden kann, für negativ erklären wollte, wie andere, selbst tüchtige Mathematiker gethan haben. Man muß in diesem Falle, wie die Figur und die Ableitung des Azimuths deutlich zeigt, die Summe von zwei rechten Winkeln zufügen, weil das Azimuth erst zwei Rechte durchlaufen muß, ehe es eine Seite der Figur trifft.

Will man consequent im Abziehen von zwei Rechten bleiben, so muß man erst vier Rechte, oder den ganzen Kreisumfang zufügen, was stets gestattet bleibt. Weil aber in diesem Falle die Azimuthe aller folgenden Winkel um vier Rechte zu groß werden würden, so ist es stets angemessener, das wahre Verhältniß beizubehalten und bei jedem Punkte, wo von der Summe des vorhergehenden Azimuths und dem Polygonwinkel die Summe von zwei Rechten nicht abgezogen werden kann, diesen Betrag als einen Beweis beizufügen, daß bei diesem Punkte das Azimuth erst zwei Rechte durchlaufen muß, ehe es eine Seite des Polygons trifft.

Sollte das Polygon etwa die Gestalt von Fig. 2. haben und die Achse dasselbe als Diagonale durchschneiden, so ändert sich in der Bestimmung der Azimuthe weiter nichts, als daß das erste

Azimuth nicht durch den Polygonwinkel von A, sondern durch den Winkel, welchen die Achse mit der aufstoßenden Polygonseite macht, gebildet wird. Weil von der richtigen Ableitung der Azimuthe, die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der ganzen Berechnung abhängt, und weil man sich darin eine gewisse Fertigkeit verschafft haben muß, wenn man mit Sicherheit operiren will, so sollen die Azimuthe für Fig. 2. ebenfalls speciell abgeleitet werden. Fig. 1.

Die Azimuthe bilden die punktirten Winkel, und es ist

$$\text{Az. A} = \sphericalangle \text{E A B}.$$

$$\text{Az. B} = \text{B} + 180 + \text{Az. A} = \text{Az. A} + \text{B} + 180^\circ.$$

$$\text{Az. C} = \text{C} - 180^\circ - (360^\circ - \text{Az. B}) = \text{C} + \text{Az. B} - 3.180^\circ = \text{A} + \text{B} + \text{C} + 180 - 3.180^\circ = \text{A} + \text{B} + \text{C} - 2.180^\circ.$$

$$\text{Az. D} = \text{D} + 180 + \text{Az. C} = \text{A} + \text{B} + \text{C} + \text{D} - 180^\circ.$$

$$\text{Az. E} = \text{E} + 180^\circ - (360^\circ - \text{Az. D}) = \text{Az. D} + \text{E} - 180^\circ.$$

$$\text{Az. F} = \text{F} + 180^\circ - (360^\circ - \text{Az. E}) = \text{Az. E} + \text{F} - 180^\circ$$

$$\text{Az. G} = \text{G} - (180 - \text{Az. F}) = \text{Az. F} + \text{G} - 180^\circ.$$

$$\text{Az. H} = \text{H} + \text{Az. G} - 180^\circ.$$

$$\text{Az. A} = \sphericalangle \text{A} - (180 - \text{Az. H}) = \text{A} + \text{Az. H} - 180^\circ.$$

Wenn mehrere Seiten auf einen Punkt stoßen und für jede derselben das Azimuth zu berechnen ist, wie bei Triangulirungen und auch bei Forstvermessungen häufig vorkommt, so werden an diesen Punkten stets nur einmal 180°, und zwar für die nächstgelegene Linie weggeworfen, die übrigen Winkel werden dann einzeln zu dem ersten Azimuth addirt, um die Azimuthe für die übrigen Punkte zu erhalten. Fig. 2.

In der Fig. 2. ist dieses bei dem Punkte H zu ersehen. Das Azimuth für den Punkt H ist das vorhergehende Azimuth von G + dem Polygonwinkel von H — 180°; das Azimuth für den Punkt H' ist das Azimuth von H + dem bei H gemessenen zweiten Winkel AHH' ohne weitere Wegwerfung von 180°, wie aus der Figur zu ersehen ist.

Hätte man die Fig. 2. bei dem Punkte E als geschlossen angesehen und statt des ganzen Polygonwinkels bei E den Winkel

Fig. 2. DEA in Rechnung gebracht, so würde man die Figur in zwei Polygone zerlegt und auf den ersten Fall zurückgeführt haben, indem dann die Linie AE als Polygonseite anzusehen gewesen wäre. Hätte man nun für den zweiten, auf der Westseite der Achse liegenden Theil der Figur, nämlich für EFGHA die Azimuthe in der Art berechnen wollen, daß man bei dem Punkte E den Winkel AEF in Rechnung genommen und die bereits berechneten Azimuthe für den östlichen Theil der Figur nicht weiter beachtet hätte, so würden sich zwar nicht die Coordinaten der Figur, nicht ihr Inhalt, wohl aber die Zeichen und dadurch die Coordinaten ändern, indem sich bei dieser Berechnungsart neue, ganz andere Azimuthe ergeben, welche in der Figur roth punktirt sind. Jedes dieser Azimuthe weicht von den früheren um 180° ab.

Hieraus schon läßt sich vermuthen, daß es bei Berechnung der Azimuthe eigentlich gar nicht darauf ankommt, ob man die inneren oder äußeren Winkel des Polygons in Rechnung nimmt, indem sich dadurch nur die Längen und Breiten für die einzelnen Punkte ändern. Alles dieses wird demnächst noch deutlicher werden, weßhalb wir nur ein Beispiel zur wirklichen Berechnung der Azimuthe geben und nur noch bemerken wollen, daß wenn die Azimuthe für einzelne Punkte der Figur berechnet werden sollen, es eben nicht nöthig ist, alle vorhergehenden Azimuthe zu berechnen. Man braucht nur die Summe aller vorhergehenden Polygonwinkel der Figur bis zu dem fraglichen Punkte zu nehmen und davon (n — 1) 180 wegzuwerfen, wenn die Anzahl der Winkel n ist. Gehet dieses nicht an, so werden zur Summe der Polygonwinkel noch so oft 360° addirt, bis die fragliche Wegwerfung geschehen kann. Es wird dieses alles durch ein Beispiel deutlicher werden, zunächst aber sollen die Azimuthe von Fig. 1. speciell berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
\sphericalangle B &= \quad 68^\circ = \text{Az. B.} \\
\sphericalangle C &= \quad 234^\circ \\
&\quad \text{Sma. } 302^\circ \\
&\quad -\ 180^\circ \\
&\quad 122^\circ = \text{Az. C.}
\end{aligned}
$$

Fig. 1.

$< D = 103^\circ$

S. 225°
$- 180^\circ$

45° = Az. D.

$< E = 147^\circ$

S. 192°
$- 180^\circ$

12° = Az. E.

$< F = 123^\circ$

S. 135°
$+ 180^\circ$

315° = Az. F.

$< G = 96^\circ$

S. 401°
$- 180^\circ$

231° = Az. G.

$< H = 249^\circ$

S. 480°
$- 180^\circ$

300° = Az. H.

$< A = 60^\circ$

S. 360°
$- 180^\circ$

180° = Az. A.

Hätte man das Azimuth vom Punkte E allein zu berechnen gehabt, so würde dieses durch die Winkelsumme von $B + C + D + E = 552^\circ - 3.180^\circ = 12^\circ$ gefunden worden sein. Das Azimuth von G dagegen ist gleich $B + C + D + E + F + G = 771^\circ - 5.180 = 781^\circ - 900^\circ$. Um hier also keinen negativen Winkel zu erhalten,

Fig. 1. füge man der Summe von 771° noch 360° bei, um das richtige Azimuth von G mit 231° zu finden.

Es ereignet sich wohl auch der Fall, daß das Azimuth irgend eines Punktes über 360° hinausfällt, und dann müssen neben den 180° noch weitere 360° weggeworfen werden, um die trigonometrischen Funktionen für diesen Winkel berechnen zu können. —

Fig. 3. Dieser Fall, welchen die Fig. 3. erläutern soll, kommt vor, wenn vorher schon Punkte da gewesen sind, wo 180° zugefügt werden mußten, um das richtige Azimuth zu erhalten und nun wieder eine Entfernung der Polygonpunkte von der Achse stattfindet.

In Fig. 3. sei AB die Achse, so ist Az. D = Az. C + D + 180°, weil das Azimuth erst 180° durchlaufen muß, ehe es die Figur trifft.

Az. E = < E + 180° − (360° − Az. D) = Az. D + E − 180°

Az. F = < F − 180 − (360 − Az. E) = Az. E + F − 180°

— 360°, sonach 360° weniger als das Azimuth betragen würde, wenn die Linie FG sich der Achse genähert hätte. Dagegen ist nun Az. G = G + 180° + Az. F wie begreiflich, weil auch hier das Azimuth erst den Halbkreis durchlaufen muß, ehe es eine Seite der Figur trifft.

§. 3.

Von der Berechnung und Zusammenstellung der Coordinaten.

Fig. 1. Denken wir uns von den einzelnen Winkelpunkten C, D, E, F, G, H Fig. 1. Perpendikel bis auf die Achse, oder wenigstens bis auf die Parallelen der vorhergehenden Punkte gefällt, so ist

CC‴ oder △y von C = CB. sin. Az. B und BC‴ oder △x von C = CB. cos. Az. B.

DD‴ oder △y von D = CD. sin. Az. C und CD‴ oder △x von D = CD. cos. Az. C.

EE‴ oder △y von E = DE. sin. Az. D und DE‴ oder △x von E = DE. cos. Az. D.

FF‴ oder △y von F = EF. sin. Az. D und EF‴ oder △x von F = EF. cos. Az. E.

Die Differenzen von y sind bis jetzt alle positiv, und zusammengenommen, dem Abstande F von der Achse oder dessen Breite gleich. Fig. 1.

Die Differenzen von x sind bald positiv bald negativ, je nach dem das Azimuth im ersten oder zweiten Quadranten liegt. Die Summe aller Differenzen von x, selbstredend mit Rücksicht auf deren Zeichen, ist dem Horizontalabstande des Punktes F von B, nämlich dessen Länge gleich.

Vom Punkte F an ändert sich die Sache wesentlich. Das Azimuth von F liegt im vierten Quadranten und deßhalb wird $\triangle y$ von G, nämlich $GG''' = FG.\ \sin.\ Az.F$ negativ, während $\triangle x$ von G oder $FG''' = FG.\ \cos.\ Az.G$ positiv bleibt.

Das Azimuth von G liegt im dritten Quadranten und deßhalb werden $\triangle y$ und $\triangle x$ vom Punkte H, nämlich $GH.\ \sin.\ Az.G$ und $GH.\ \cos.\ Az.G$ negativ.

Das Azimuth von H liegt im vierten Quadranten, weßhalb $\triangle y$ von A negativ, $\triangle x$ aber positiv wird.

Die Summen der negativen $\triangle y$ vom Punkte F bis zum Punkte A, sind den positiven $\triangle y$ von B bis F vollkommen gleich und die ganze Summe ist und muß = Null sein, weil die Ordinate A = Null ist, oder mit anderen Worten, weil der Punkt A in der Achse liegt.

Die Länge oder Abciſſe vom Punkte A ist gleich der algebraischen Summe aller vorhergehenden $\triangle x$ und der Länge der Achse AB gleich.

Berechnet man noch $\triangle y$ und $\triangle x$ vom Punkte B, so erhält man dafür

$\triangle y = AB.\ \sin.\ Az.A = AB.\ \sin.\ 180^\circ = AB \,.\, 0 = 0.$

$\triangle x = AB.\ \cos.\ Az.A = AB.\ \cos.\ 180 = AB \,.\, -1 = -AB.$

Es heißt dieses weiter nichts als die Summe aller $\triangle x$ bis B = Null.

Wir sehen hieraus, daß wenn wir die Ordinate und Abscisse eines Punktes haben wollen, wir nur sämmtliche Differenzen von y und von x der vorhergehenden Punkte, mit Rücksicht auf deren Zeichen, zu addiren haben.

Fig. 1. Gehet die Achse durch die Figur hindurch, so verändert dieses nichts; die Differenzen von y werden dann einmal rechts und einmal links der Achse = 0 und die Differenzen von x summiren sich einmal positiv zur Länge der Achse und einmal negativ zur Länge derselben und werden in ihrer Gesammtsumme = 0. Bei Berechnung der Coordinaten-Differenzen und späterhin der Coordinaten selbst, ist darauf zu sehen, daß man stets den nächstfolgenden Stationspunkt anschreibt, für welchen y und x wirklich berechnet werden soll, weil man sonst stets auf dem vorhergehenden Punkte die Ordinate und Abscisse vom folgenden erhalten würde. Es wird dieses bei wirklicher Berechnung der Coordinaten noch deutlicher werden.

In der Theorie bietet sonach die Berechnung der Coordinaten durchaus keine Schwierigkeiten dar, allein in Praxi ist dieses meist anders. Weder unsere Sinne, noch unsere Instrumente sind so vollkommen, noch unsere Gehülfen so gewandt und achtsam, daß wir vollkommen richtige Resultate erlangen, und wir dürfen uns sehr befriedigt halten, wenn wir in der Länge sämmtlicher $\triangle y$ und $\triangle x$ in ebenen Gegenden nicht mehr als $\frac{1}{1200}$ Theil und im Gebirge nicht mehr als $\frac{1}{600}$ Theil des Ganzen fehlen. Diese Genauigkeit kann der Geometer bei Anwendung von guten Instrumenten und bei gehöriger Achtsamkeit ohne große Anstrengung erreichen, und die Behörde oder der Waldeigenthümer kann damit auch ganz wohl zufrieden sein, und es ist einestheils lächerlich, anderntheils ungerecht, eine übergroße Genauigkeit zu verlangen, indem kein Forsttaxator den Ertrag eines Waldes über $\frac{1}{10}$ hinaus wird verbürgen wollen und können.

Wir wollen nunmehr zur Uebung und Belehrung für den Anfänger ein Polygon von 15 Seiten behandeln, wo Linien und Winkel einem wirklichen und keineswegs günstigen Terrain entnommen sind. Die Winkel sind bereits verbessert und zum geometrischen Schluß gebracht, an den Seiten dagegen nichts geändert. Eine Uebersicht der Figur wird nicht beigegeben; wer dieselbe nicht entbehren zu können glaubt, mag sie sich aus den Maaßen

zeichnen. Wir werden zur genauen Zeichnung derſelben ſpäterhin Fig. 1. Anleitung geben.

Die Winkel und Linien — Seiten — ſind folgende:

A = 102°,06′	AB = 132°,8′ *).
B = 133,30	BC = 1774
C = 134,50	CD = 3095
D = 146,16	DE = 8041
E = 213,21	EF = 4715
F = 123,06	FG = 11914
G = 82,52	GH = 5146
H = 186,25	HJ = 12472
J = 170,54	JK = 7715
K = 72,50	KL = 3904
L = 143,42	LM = 1233
M = 195,22	MN = 9524
N = 190,21	NO = 6580
O = 169,52	OP = 2494
P = 274,33	PA = 3782

Obgleich dieſes Polygon füglich als ein Ganzes berechnet werden könnte, ſo iſt doch daſſelbe, hauptſächlich aus dem Grunde, daß die Ordinaten nicht zu lange werden ſollten, durch eine, das Polygon von dem Winkelpunkte N nach dem Winkelpunkte F ſchneidende Linie, welche als Achſe angenommen werden ſoll, in zwei Vielecke getheilt, und es genügt uns zur Berechnung, zu wiſſen, daß die Achſe mit der Linie FE einen Winkel von 30° 48′ und mit der Linie NO einen Winkel von 54° 44′ macht.

*) Der Geometer ſchreibt alle Linien beſſer in Fußen, oder wo eine größere Genauigkeit verlangt wird, in Zollen, ohne Unterſcheidung von Ruthen und Fußen. Eine Linie von 15674 mißt im letzteren Falle 156° 7′ 4″.

Fig. 1. **Die Berechnung der Azimuthe und der Differenzen y und x ist in folgendem Schema geführt.**

Namen der Stationen.	Winkel gemessene °	′	Neigung °	′	Linien in Fussen.	Berechnung von △y. Logarithmen. a. Sinus. b. Seite.	△y	Berechnung von △x. Logarithmen. a. Cosinus. b. Seite.	△x
F	30	48	30	48	4715	a. 9,7093063 b. 3,6734817 S. 3,3827880	+ 2414	a. 9,9339729 b. 3,6734817 S. 3,6074546	+ 4050
E	213	21	64	09	8041	9,9542129 3,9053101 3,8595230	+ 7237	9,6395030 3,9053101 3,5448131	+ 3506
D	146	16	30	25	3095	9,7043947 3,4906607 3,1950554	+ 1567	9,9356918 3,4906607 3,4263525	+ 2669
C	134	50	345 (14	15 45) *)	1774	9,4058617 3,2489536 2,6548153	— 452	9,9854471 3,2489536 3,2344007	+ 1716
B	133	30	298 (61	45 15)	1328	9,9428643 3,1231981 3,0660624	— 1164	9,6821349 3,1231981 2,8053330	+ 639
A	102	06	220 (40	51 51)	3782	9,8156315 3,5777215 3,3933530	— 2474	9,8787656 3,5777215 3,4564871	— 2861
P	274	33	315 (44	24 36)	2494	9,8464318 3,3968964 3,2433282	— 1751	9,8524959 3,3968964 3,2493923	+ 1776
O	169	52	305 (54	16 44)	6580	9,9119422 3,8182259 3,7301681	— 5372	9,7014638 3,8182259 3,5796897	+ 3799
N	54	44	180	00					

*) Die eingeklammerten Zahlen sind die in den Tafeln aufzuschlagenden Winkel. Sie wurden zur Erläuterung für den noch nicht hinlänglich geübten Rechner beigeschrieben.

Wir wollen nunmehr auch den anderen Theil des Polygons berechnen, hierbei die Achse und die Azimuthe der Anschlußpunkte F und N beibehalten, und nur noch bemerken, daß, da wir bei Berechnung des Az. von N nach dem Punkte F bereits 180° weggeworfen haben, bei N jetzt nur der Winkel des zweiten Polygons zu dem fraglichen Azimuth addirt werden darf. Fig. 1.

Stationen.	Winkel gemessene °	′	Neigung °	′	Seiten.	Berechnung von △y. Logarithmen. a. Sinus. b. Seite.	△y	Berechnung von △x. Logarithmen. a. Cosinus. b. Seite.	△x
N	(180 135	00) 37	315 (44	37 23)	9524	a. 9,8447601 b. 3,9788194 S. 3,8235796	— 6662	a. 9,8541093 b. 3,9788194 S. 3,8329287	+ 6807
M	195	22	330 (29	59 01)	1233	9,6857991 3,0909631 2,7767622	— 598	9,9417492 3,0909631 3,0327123	+ 1078
L	143	42	294 (65	41 19)	3904	9,9583869 3,5915098 3,5498967	— 3547	9,6207634 3,5915098 3,2122732	+ 1630
K	72	50	187	31	7715	9,1166562 3,8873359 3,0039921	— 1009	9,9962519 3,8873359 3,8835878	— 7649
J	170	54	178	25	12471	8,4443944 4,0959361 2,5403305	+ 347	9,9998342 4,0959361 4,0957703	— 12467
H	186	25	184	50	5146	8,9256089 3,7114698 2,6370787	— 434	9,9984529 3,7114698 3,7099227	— 5128
G	82	52	87	42	11914	9,9996500 4,0760576 4,0757076	+11905	8,6034886 4,0760576 2,6795462	+ 478
F	92	18	00	00	*)				

*) Um die allerdings zeitraubende logarithmische Berechnung der Coordinaten-Differenzen abzukürzen, hat man in neuerer Zeit besondere

Fig. 1. Stellen wir nun die Differenzen von y und x zusammen, um zu sehen, ob und wie das Polygon schließt, so erhalten wir

A) für das erste Polygon:

△y		△x	
+	−	+	−
2414	452	4050	2861
7237	1164	3506	
1567	2474	2669	
	1751	1716	
	5372	639	
		1776	
		3799	
11218	11213	18155	2861

Wir ersehen hieraus, daß die △y bis auf 5' schließen und daß die Länge der Achse 18155 — 2861 = 15294' beträgt. Da wir dieselbe nicht gemessen haben, so läßt sich über die Richtigkeit des Resultates noch nichts sagen, welche sich indessen aus den Resultaten der Zusammenstellung des zweiten Polygons ergeben wird.

B) für das zweite Polygon:

△y		△x	
+	−	+	−
347	6662	6807	7649
11905	598	1078	12467
	3547	1630	5128
	1009	478	
	434		
12252	12250	9993	25244

Tafeln zur Berechnung derselben ohne Logarithmen entworfen, worin die Coordinaten-Differenzen nach Maaßgabe des Azimuths und der Seiten sofort erhalten werden.

Empfehlungswerthe Tafeln dieser Art sind die von Reissig, Tenner und Reutzel berechneten, in Heidelberg bei Ernst Mohr im Jahre 1854 in 2. Auflage erschienenen Tafeln zur Berechnung der Coordinaten ohne Logarithmen.

Die $\triangle y$ schließen auf 2 Fuß und die Achse ergiebt sich hier zu Fig. 1.
$-25244 + 9993 = -15251$, während wir dieselbe im ersten Polygon zu $+15294$ gefunden haben.

Die Abweichung der algebraischen Summe von 0 beträgt 43 Fuß oder $\frac{1}{1300}$ der ganzen Länge, was bei den sehr gut schließenden Ordinaten offenbar zu viel ist und auf einen Fehler von 5 Ruthen — wahrscheinlich einer Kettenlänge — in der Längenmessung schließen läßt, welcher, da er nur in einer der drei Linien KJ, JH oder GH liegen kann, indem diese bei kleinen $\triangle y$ große $\triangle x$ haben, sich durch Nachmessung leicht finden ließe.

Wir wollen jedoch hier davon absehen und zeigen, wie sich die Fehler corrigiren und die Figur zum vollkommenen Schluß bringen läßt.

Da im ersten Polygon auf sämmtliche $\triangle y$, welche sich ohne Rücksicht auf ihre Zeichen zu 22431 summiren, 5′ zu vertheilen und in dieser ganzen Rechnung Zolle nicht berücksichtigt sind, so fallen auf circa 4500′ Länge 1 Fuß Correktur, und zwar müssen, da der Fehler positiv ist, die positiven $\triangle y$ kleiner und die negativen größer gemacht werden. Sind keine Linien vorhanden, welche ihrer schwierigen Messung wegen vorzugsweise zu berücksichtigen sind, so wird der Fehler nach Maaßgabe der Längen vertheilt, und es würden da im vorliegenden Falle das $\triangle y$ von E nach D um 2 Fuß kleiner, die $\triangle y$ von A nach P um 1′ und von O nach N um 2′ Fuß größer gemacht werden. Auf die übrigen Linien kann nichts fallen, da ihre Länge außerhalb der Fehlergrenze liegt.

Dagegen ist die Abweichung in den $\triangle x$ stärker, und weil dieselbe ebenfalls positiv ist, so müssen die $+\triangle x$ verkürzt, die $-\triangle x$ verlängert werden, und zwar im Verhältniß ihrer Länge um $\frac{1}{1300}$, falls nicht Linien vorhanden sind, welche bei der Fehlervertheilung ganz besondere Rücksicht verdienen.

Wie sich hiernach die Längenunterschiede stellen, werden wir aus der Zusammenstellung ersehen, welche später folgt.

Fig. 1. Hier soll nur noch bemerkt werden, daß die Fehlervertheilung nach dem Verhältniß der einzelnen Längen sich nur für die eine Kathegorie, nämlich entweder nur für die Längen oder nur für die Breiten mathematisch begründen läßt; denn sobald die Correktur des einen Fehlers bestimmt ist, läßt sich die des anderen durch Fig. 4. Rechnung finden, wie sich aus Fig. 4. ersehen läßt.

Es sei ABC ein Dreieck zur Berechnung von $BC = \triangle y$ und von $AC = \triangle x$; das Azimuth von A heiße α und es betrage der Fehler in $\triangle y = BF = a$, so ist dadurch und durch α die Veränderung in $\triangle x$ oder DF bestimmt, und es beträgt dieselbe a. cotg. α, d. h. man müßte die in den $\triangle y$ corrigirten Fehler mit den Cotangenten der betreffenden Azimuthe multipliciren, um die richtige Veränderung in den $\triangle x$ zu erhalten. Hätte man die Fehler in den $\triangle x$ nach Verhältniß ihrer Länge corrigirt, so würde die Veränderung für $\triangle y$ durch den Ausdruck = f. tg. α gefunden, d. h. man muß die Fehler in den $\triangle x$ mit den Tangenten der betreffenden Azimuthe multipliciren, um die Veränderungen in den $\triangle y$ zu finden.

Weil indessen die Abweichungen der $\triangle y$ und $\triangle x$ nicht allein in kleinen Fehlern in Linien, sondern auch in Winkeln und selbst in den Tafeln liegen, indem meist nicht Decimalstellen genug in Rechnung mitgenommen werden, so beläßt man es bei der verhältnißmäßigen Vertheilung der Fehler, falls diese die vorgeschriebene Grenze nicht überschreiten.

In der nachfolgenden Tabelle sind nunmehr die Coordinaten berechnet und dadurch die Materialien zur Inhaltsberechnung und zur Zeichnung der Karte enthalten, weßhalb wir uns hierbei noch etwas verweilen müssen.

Fig. 4.

Station.	Berechnetes $\triangle y$	Corrigirtes $\triangle y$	Y vom vorherg. Punkte	Y	Berechnetes $\triangle x$	Verbessertes $\triangle x$	Vorhergehend. x	X
F	+ 2414	+ 2414	0	0	+ 4050	+ 4047	0	0
			+	+			+	+
E	+ 7237	+ 7235	0	+2414	+ 3506	+ 3503	0	4047
			+	+			+	+
D	+ 1567	+ 1567	2414	9649	+ 2669	+ 2667	4047	7550
			+	+			+	+
C	— 452	— 452	9649	11216	+ 1716	+ 1715	7550	10217
			+	+			+	+
B	— 1164	— 1164	11216	10764	+ 639	+ 639	10217	11932
			+	+			+	+
A	— 2474	— 2475	10764	9600	— 2861	— 2863	11932	12571
			+	+			+	+
P	— 1751	— 1751	9599	7125	+ 1776	+ 1774	12571	9708
			+	+			+	+
O	— 5372	— 5374	7125	5374	+ 3799	+ 3796	9708	11482
			+	+			+	+
N	0	0	5374	0			11482	15278

Ferner II. Polygon.

Station.	Berechnetes $\triangle y$	Verbessertes $\triangle y$	Vohergehend. Y	Y	Berechnetes $\triangle x$	Verbessertes $\triangle x$	Vorhergehend. x	X
								+
N	— 6662	— 6663	0	0	+ 6807	+ 6802	0	15278
				—			+	+
M	— 598	— 598	0	6663	+ 1078	+ 1077	15278	22080
			—	—			+	+
L	— 3547	— 3547	6663	7261	+ 1630	+ 1629	22080	23157
			—	—			+	+
K	— 1009	— 1009	7261	10808	— 7649	— 7655	23157	24786
			—	—			+	+
J	+ 347	+ 347	10808	11817	+ 12467	- 12477	24786	17131
			—	—			+	+
H	— 434	— 434	11817	11470	— 5128	— 5132	17131	4654
			—	—			+	—
G	+11905	+ 11904	11470	11904	+ 478	+ 478	4654	478
			—				—	
F			11904	0			478	0

Wir haben in diesen beiden Zusammenstellungen die Ordinaten und Abscissen der Anfangspunkte = 0 gesetzt, wie dieses sich schon aus Fig. 1. ergiebt. Die Differenz von y und x von der ersten

Fig 4. Linie giebt natürlich auch y und x für den ersten Punkt außerhalb der Achse. Um bei Berechnung der Coordinaten keine Fehler zu begehen, ist es stets rathsam denjenigen Stationspunkt anzuschreiben, für welchen $\triangle y$ und $\triangle x$, sowie später y und x berechnet werden soll. Hiernach würde, um bei der Fig. 1. stehen zu bleiben, als erster Stationspunkt nicht B, sondern C anzuschreiben und das Azimuth von B nach C und die Linie BC in Rechnung zu nehmen sein. Wollte man, wie von vielen Geometern geschiehet, den Stationspunkt B anschreiben, so würde man stets y und x für den folgenden Punkt berechnen.

Stoßen zwei oder mehrere Polygone zusammen, so werden dieselben zwar selbstständig behandelt, doch der gemeinschaftlichen Grenze wegen nur in Verbindung mit dem oder den vorhergehenden Polygonen corrigirt und berechnet.

Fig. 5. Es wird dieses durch die Fig. 5. deutlicher werden, und uns zugleich Gelegenheit gegeben, das Verfahren bei der Correktur etwaiger Fehler näher zu begründen. Es sei das Polygon I durch 13 Seiten und Winkel geschlossen; das Polygon II laufe von St. VIII ab nach A über B, C, D, E... bis zum Anschlußpunkte XII. Die Vermessung dieses Polygons bietet nichts bemerkenswerth Neues, wohl aber ist bei der Zusammenstellung der Winkel, der Berechnung der Azimuthe und der Coordinaten die gemeinschaftliche Grenzroute von VIII bis XII wohl zu beachten. Bei Zusammenstellung der Winkel im Polygon II — der s. g. Winkelprobe — kommen längs der gemeinschaftlichen Grenze, mit Ausschluß der Anschlußwinkel, die Ergänzungswinkel zu 360° oder 4 R. im I. Polygon in Rechnung und es können diese Winkel in dem einen Polygon nicht geändert werden, ohne auf das II. Polygon zu influiren.

Wir wollen nun annehmen, es ergäbe sich bei Zusammenstellung der Winkel im Polygon I ein Fehler von $\pm$ a und im Polygon II ein solcher von $\pm$ b sonach in beiden Polygonen ein positiver oder negativer Fehler, so kann **kein** Fehler in der gemeinschaftlichen Route, sondern es müssen dieselben in den übrigen Winkeln

der Polygone liegen. Ergiebt sich aber in beiden Polygonen ein entgegengesetzter Fehler d. h. in dem einen ein positiver in dem andern ein negativer Fehler oder umgekehrt, so fällt die Differenz beider Fehler sonach a — b oder b — a auf die gemeinschaftliche Route, der Rest liegt in den Punkten des Umfangs. Fig. 5.

Es läßt sich dieser Ausspruch folgendermaßen begründen.

Es sei die Anzahl der Außenpunkte im Polygon I = m, die Anzahl der zwischen beiden Polygonen gemeinschaftlichen Punkte = n, die Anzahl der Außenpunkte im Polygon II = p, so bestehet das Polygon I aus m + n Winkeln deren Summe = (m + n — 2). 2 R. betragen muß; das Polygon II bestehet aus n + p Winkeln, deren Summe = (n + p — 2). 2 R. sein muß.

Betrachten wir beide Vielecke als eins, so hat dieses (m + p + 2) Winkel (die Winkel VIII und XII wurden zu den gemeinschaftlichen gezählt, müssen aber hier mit aufgeführt werden) und die Summe derselben muß sein (m + p). 2 R. Die Summe aller gemeinschaftlichen Winkel ergiebt sich, wenn man die Winkelsumme des vereinigten Polygons von der Winkelsumme der Einzel-Polygone abziehet, sonach durch den Ausdruck (m + n — 2). 2 R + (n + p — 2). 2 R — (m + p) 2 R = (2 n — 4) 2 R = (n — 2) 4 R. Da n — 2 gemeinschaftliche Winkel vorhanden sind und jeder 4 R. mißt, so ist der ermittelte Ausdruck schon an und für sich klar. Ist nun in dem Polygon I ein Fehler von ± a und im Polygon II ein Fehler = ± b vorhanden, dann ist die Summe der Winkel des ganzen Umfangs = (m + p) 2 R ± (a + b) und der ganze Fehler liegt in dem äußeren Umfang der Vielecke ohne auf die gemeinschaftlichen Winkel einzuwirken, da ihre Summe nach wie vor (n — 2) 4 R ist, nämlich (m + n — 2) 2 R ± a + (n + p — 2) 2 R ± b — (m + p) 2 R ± (a + b) = (n — 2). 4 R.

Ist aber im Polygon I der Fehler ± a; im Polygon II = ∓ b, dann wird die Summe aller Umfangswinkel = (m + p) 2 R ± (a — b), sonach in diesen nur die Differenz a — b des Fehlers enthalten. Der Fehler b muß also in der gemeinschaftlichen Route liegen, wo er

Fig. 5. für das eine Polygon positiv, für das andere negativ wird. Es ergiebt sich dieses auch aus folgendem Ausdruck für die Summe der gemeinschaftlichen Winkel $= (m+n-2)\,2\,R \pm a + (n+p-2)\,2\,R \pm b - (m+p)\,2\,R \mp (a-b) = (n-2)\,4\,R.$, also der Summe vor der Correktur gleich.

Es ist dieses bei Vertheilung der kleinen Winkelfehler wohl zu beachten und mit der Correktur erst dann vorzugehen, nachdem alle Polygone mit gemeinschaftlichen Grenzrouten zusammengestellt sind und genau ermittelt ist, welcher Antheil auf die gemeinschaftliche Route, und welcher auf die äußeren Punkte der Polygone fällt. Betrachten wir unsere Figur nochmals, so finden wir, den Pfeil NM durch den Punkt VIII als Achse angenommen, daß das Azimuth VIII nach A im II. Polygon gefunden wird, wenn man einfach den Winkel VIII im Polygon II zu dem Azimuth VIII im Polygon I addirt, wie die punktirten Bogen darthun. Sind wir mit Berechnung der Azimuthe im II. Polygon bis zum Punkte XII gekommen, so müssen wir hier, das Azimuth vom vorhergehenden Punkte des I. Polygons + 180° erhalten, wie dieses auch aus der Figur hervorgehet.

Es brauchen deßhalb selbstredend die Coordinaten für die gemeinschaftlichen Punkte nur einmal berechnet zu werden und kommen dieselben bei dem II. Polygon mit entgegengesetzten Zeichen in Ansatz, indem sowohl sin. $(\alpha + 180)$ als cos. $(\alpha + 180) =$ — sin. α und — cos. α sind.

Bei der Correktur der Fehler in den Coordinaten-Differenzen ist für die gemeinschaftliche Routen zu befolgen, was bei Correktur der Winkelfehler angegeben worden, nämlich daß die Fehler, wenn sie in beiden Polygonen gleiche Zeichen haben, nur auf die äußeren Routen corrigirt werden dürfen, daß aber bei wechselnden Zeichen der Fehler die ganze Differenz auf die gemeinschaftliche Route corrigirt werden kann, wenn dadurch die vorgeschriebene resp. nachgelassene Fehlergrenze nicht überschritten wird.

§. 4. Fig. 1.

Von der Berechnung des Inhaltes.

Wir bedürfen zur Inhaltsberechnung der Polygone keiner Karte, keines Maaßstabes, keines Zirkels, sondern nur des am Schlusse des vorigen §. angefertigten Coordinaten-Verzeichnisses und können damit auch noch anderweitige wichtige Operationen, wie Ein- und Abtheilungen, Vertheilungen u. d. g. m. verrichten.

Zur vorläufigen Erläuterung verweisen wir auf Fig. 1., und bemerken, daß der Inhalt des Dreiecks BCC''' aus der Hälfte des Produktes von $\triangle y$ und $\triangle x$ vom Punkte B bestehet.

Der Flächeninhalt des Parallelltrapezes $CDD^{IV}C'''$ wird durch den Ausdruck $\left(\frac{CC''' + DD^{IV}}{2}\right) . CD'''$ gefunden.

$CC''' = y$ vom Punkt C

$DD^{IV} = y$ . . . . D und $CD''' = \triangle x$ vom Punkte D folglich

$J = \frac{y \text{ von } C + y \text{ von } D}{2} . \triangle x$ von D. Dieses J ist negativ, weil das Az. von C im zweiten Quadranten liegt, und sonach $\triangle x$ negativ ist.

Der Inhalt des Trapezes $DEE^{IV}D^{IV} = \left(\frac{y \text{ von } D + y \text{ von } E}{2}\right)$ multiplizirt mit $\triangle x$ von D. Dieses Trapez ist positiv, weil $\triangle x$ positiv ist.

Der Inhalt des Trapezes $EFF^{IV}E^{IV} = \left(\frac{y \text{ von } E + y \text{ von } F}{2}\right)$ X $\triangle x$ von F, und es ist das Produkt positiv.

Ganz auf gleiche Art gehet die Sache bis an's Ende fort und es ist nur nöthig, stets genau Bedacht auf die Zeichen von $\triangle x$ zu nehmen, denn da in der vorliegenden Figur alle y positiv sind, so werden alle Trapezien positiv, wo $\triangle x$ positiv und alle Trapezien negativ, wo $\triangle x$ negativ ist.

Betrachtet man die Figur vom Anfang an genau, so wird man finden, daß das erste positive Dreieck durch das folgende nega-

Fig. 1. tive Trapez aufgehoben wird, sonach nach Berechnung von zwei Parcellen nur das negative — zur Figur nicht gehörige Stück BCDD^{IV} übrig ist. Durch die dritte positive Parcelle wird nicht nur das bei der zweiten Parcelle verbliebene negative Stück wieder aufgehoben, sondern auch der ersten Parcelle wieder Geltung verschafft, und es ist nun mit den ersten drei Parcellen der zwischen den Punkten BCDE und E^{IV} liegende Theil des Polygons berechnet. Auf diese einfache Art gehet es bis zum Schlusse weiter, und es wird, wenn man die Ordinaten für die einzelnen Punkte mit y, y', y'' ꝛc. die Differenzabscissen für die correspondirenden Punkte mit $\triangle x$, $\triangle x'$, $\triangle x''$ bezeichnet der doppelte Flächengehalt der Figur durch den Ausdruck: $2J = (y + y').\triangle x + (y' + y'').\triangle x'' + (y'' + y''').\triangle x''' + \ldots\ldots (y^{n-1} + y^n).\triangle x^{n-1}$. gefunden. Beginnt und schließt die Figur mit Dreiecken — was aber nicht immer der Fall ist — so wird das erste y und das letzte $y^n = 0$.

Soll nicht die ganze Figur, sondern nur ein Theil derselben, etwa die Fläche von BCDE nach A oder die Fläche DEFG ꝛc. berechnet werden, so ist im ersten Falle, wenn man mit der Inhaltsberechnung bis nach E gekommen ist, nur nöthig, zu der Ordinate von E die von A zu addiren, die Summen zu halbiren und mit der Differenz von x zwischen A und E zu multipliciren. Im zweiten Falle berechnen wir von D an die drei Parzellen bis G und multipliciren dann die halbe Summe der y von D und G mit dem Unterschiede der Abscisse von G und D, daß dieser Unterschied, und sonach die ganze Parcelle negativ wird, ist aus der Figur zu ersehen. Sollte das Polygon, worunter wir uns einen ziemlich bedeutenden Wald denken wollen, in regelmäßige Jagen, welche mit AB oder mit irgend einer beliebigen Linie parallel und stets in einer senkrechten Entfernung von 100° vom Umfange ablaufen sollen, einzutheilen sein, so wird nur nöthig y zu 100° anzunehmen und den Punkt des Umfangs zu suchen, welcher diesem y entspricht. Gesetzt es falle dieser zwischen zwei Polygonpunkte, so hat man nur nöthig, vorhergehend y von 100° abzuziehen und dann folgende Proportion anzusetzen: $\triangle y$ vom folgenden Polygon-

punkte: zu $\triangle y'$ d. h. zur Differenz von 100° und dem y des vorhergehenden Punkes = die ganze Polygonseite zum gesuchten Stück derselben; (die Anfänger mögen sich dieses durch eine kleine Zeichnung selbst erläutern). Wird auf der entgegengesetzten Seite des Polygons ebenso verfahren und derjenige Punkt ermittelt, wo das Gestelle ausmünden muß, so kann man, vorausgesetzt, daß richtig gemessen und gerechnet worden ist, den Aufhieb auf der rechten Seite unter dem Winkel = vorhergehendes Azimuth und auf der linken Seite ebenfalls unter dem Winkel, welchen die Achse oder eine Parallele zu derselben mit der betreffenden Polygonseite bildet, gleichzeitig beginnen lassen. Wer freilich seinen Operationen noch nicht trauet, und trauen kann, wird wohl thun, den Aufhieb nur von einer Seite und vorläufig nur in einer Schalmlinie aufhauen zu lassen. Fig. 1.

Die s. g. Feuergestelle würden im vorliegenden Falle senkrecht von der Achse ablaufen und noch leichter als die Hauptgestelle festzulegen sein.

Wir werden weiterhin noch mehr Gelegenheit haben, den großen Nutzen der polygonometrischen Behandlung der Sache, namentlich bei Grenzen, deren Festlegung und Vereinfachung ꝛc. kennen zu lernen, und wollen nunmehr den Inhalt der uns vorliegenden Figur lediglich aus dem Coordinaten-Register berechnen, dabei zugleich bemerken, daß man bei dieser Berechnung meist besser aus den Elementen, als mit Logarithmen rechnet, und zwar aus dem Grunde, weil, wenn die Zahlen groß werden, was bei großen Complexen nicht zu vermeiden ist, die logarithmischen Summen so groß werden, daß die Zahl dazu aus den Tafeln gar nicht mehr richtig zu bestimmen ist.

Um diese Inhaltsberechnung bequem führen zu können, theilt man sich den Bogen in kleine Gefächer, je zu einem Exempel ein und läßt unten einige Gefächer leer, um etwaige Fehler corrigiren zu können.

Fig. 1.

EF. No. 1.	ED No. 2.	DC No. 3.	CB No. 4.
2414 +	2414 +	9649 +	11216 +
0 1207	9649 6031,5	11216 10432 5	10764 10990
2 4047	12063 350,3	20865 266 7	21980 1715
8449	2 18094,5	2 730275	2 54950
4828	301575	625950	1099
4828	180945	625950	7693
4884729	21128344,5	208650	1099
		27823477,5	18847850

BA. No. 5.	AP No. 6.	PO. No. 7.	ON No. 8.
10764 +	9600 —	7125 +	5370 +
9600 10182	7125 8362,5	5374 6249,5	0 2685
20364 639	16725 286,3	12499 1774	3796
2 91638	2 25087,5	2 24998,0	16110
30546	501750	437465	24165
61092	669000	437465	18795
6506298	167250	62495	8055
	23941837,5	11086613,0	10192260

Zur Erläuterung werden einige wenige Worte genügen.

Die Bezeichnung in der Mitte der Gefächer gilt den durch die betreffenden Polygonseiten gebildeten Parzellen und ihren Nummern, die Ziffern links oben in der Ecke sind die correspondirenden y, wie sie in der Zusammenstellung folgen. Um mit möglichst kleinen Zahlen zu rechnen, wird deren Summe jedesmal halbirt und dieser Quotient als Multiplicator in die Mitte des Fachs geschrieben. Das correspondirende und verbesserte $\triangle x$ bildet jedesmal den Multiplicanten und es entscheidet, da hier alle y positiv sind, dessen Zeichen über die Positivität oder Negativität des Inhaltes der Parzelle.

Die Inhaltsberechnung für die II. Sektion des Polygons ist folgende:

Fig. 1.

NM No. 1.	ML No. 2.	LK No. 3.	KJ. No. 4.
-6663 —	-6663 —	- 7261 —	-10808 +
0 3331,5	-7261 6962	-10808 9034,5	-11817 11312,5
2 6802	-13924 1077	18069 1629	-22625 7665
66630	2 48734	2 813105	2 565625
2665200	48734	180690	565625
199890	69620	542070	678750
22660863,0	7498074	90345	791875
		14717200,5	86597187,5

JH. No. 5.	HG. No. 6.	GF. No. 7.
-11817 +	-11470 +	11904 —
-11470 11643,5	-11904 11687	0 5952
-23287 12477	23374 5132	2 478
2 815045	2 23374	47616
815045	35061	41664
465740	11687	23808
232870	58435	2845056
116435	59977684	
145275949,5		

Hier sind sämmtliche Ordinaten, weil sie unterhalb der Achse liegen, negativ und deßhalb werden alle Parzellen negativ, wo $\triangle x$ positiv und alle Parzellen positiv, wo $\triangle x$ negativ ist.

Eine Zusammenstellung des Flächeninhaltes giebt nun folgendes Resultat:

No.	1	+ 4884729	No. 6	— 23941837,5
„	2	+ 21128344,5		
„	3	+ 27823477,5		
„	4	+ 18847850.		
„	5	+ 6506298.		
„	7	+ 11086613.		
„	8	+ 10192260.		
Sma.		+ 100469572	Sma.	— 23941837,5
Sma.		— 23941837,5		
Alg. Sa.		= 76527734,5		

Fig. 1. Läßt man die Einheit □ Fuße gelten und rechnet man deren 100 auf eine Quadratruthe und 180 von dieſen auf einen Morgen, ſo beträgt die Fläche 4251 Morgen 97□° und 34,5,□' oder auch, wie zu forſtlichen Zwecken viel bequemer iſt, in Decimaltheilen von Morgen = 4251,541 Morgen.

Hätte man die Einheit Zolle gelten laſſen, ſo müßten 2 Stellen für □" und 2 für □' abgeſchnitten werden und es verbleiben in dieſem Fall 7652□° 77□' 34□" oder 42,515 Morgen, mithin 0,01 der vorhin erhaltenen Fläche.

Die II. Section ergab folgende Flächenparzellen.

		+			−
No.	4.	86597187.5	No.	1.	22660863
"	5.	145275949,5	"	2.	7498074
"	6.	59977684	"	3.	14717200
			"	7.	2845056
Sa.	+	291850821,0		−	47721193,0
Sa.	−	47721193,0			

Inh. = 2441296,28 = 13562 Morgen 136□° 28□'.

Werden die Einheiten für Zolle geleſen, ſo reducirt ſich der Inhalt auf 135,63 Morgen.

Obgleich die polygonometriſche Inhaltsberechnung außerordentlich einfach und kurz iſt, wenn einmal das nöthige Material dazu, die Coordinaten vorhanden ſind, ſo giebt es doch auch Fälle, wo man allgemeiner Formeln bedarf, um daraus andere Größen zu beſtimmen. Es veranlaßt uns dieſes einige beſondere Formeln für den Inhalt zu entwickeln und darauf allgemeine Ausdrücke für den Inhalt der Polygone zu gründen.

Wir wiſſen, daß in jedem Polygon die Summe aller Breiten oder aller y = Null, die aller Längen oder aller x = der Achſe, oder wenn dieſe innerhalb der Figur liegt, ebenfalls = Null iſt.

Wenn wir die Werthe für die Azimuthe nicht gleich in Zahlen ausrechnen, ſondern den Sinus und Coſinus für deren allgemeinen Werthe in Rechnung nehmen, ſo erhalten wir folgende Gleichungen.

sin. Az. A = sin. A und cos. Az. A = cos. A Fig. 1.
Az. B = A + B — 180° ſonach
sin. Az. B = — sin. (A + B) und cos. Az. B = — cos. (A + B)
Az. C = A + B + C — 2.180°, ſonach
sin. Az. C = sin. (A + B + C) und cos. Az. C = cos. (A + B + C)
Az. D = sin. A + B + C + D — 3.180°, ſonach
sin. Az. D = — sin. (A + B + C + D) und cos. Az. D =
— cos. (A + B + C + D) u. ſ. w.

Sollte ſich der Fall ereignen, daß von einem Azimuthe nicht 180° abgezogen werden können, vielmehr 180° zuzufügen ſind, ſo denkt man ſich zu dem Ergebniß erſt 360° zugefügt, worauf man denn in jedem Fall 180° abziehen kann. Geſchiehet dieſes, ſo ändern ſich die obigen Gleichungen nicht im mindeſten und es ſind dieſelben ſonach ganz allgemein.

Bezeichnet man nun die Seiten des Polygons mit den kleinen, die der Winkel mit den großen Buchſtaben des Alphabets, ſo hat man allgemein:

a sin. A — b sin. (A + B) + c sin. (A + B + C) —
— d sin. (A + B + C + D) + ... = 0 und
a cos. A — b cos. (A + B) + c cos. (A + B + C) —
— d sin. (A + B + C + D) + ... = x oder

der Achſe.

Daß man bei den Werthen der Winkel auf die Quadranten worin ſie liegen, und ſonach auf die Zeichen der Sinuſſe und Coſinuſſe Rückſicht nehmen muß, verſtehet ſich ganz von ſelbſt.

Um dem Leſer den Grund des Verfahrens bei den nachſtehenden Betrachtungen von vornherein näher zu erläutern, bemerken wir, daß allgemein angenommen wird, als fehle die letzte Seite des Polygons und die beiden angeſchloſſenen Winkel.

1. Aufgabe. (Fig. 6a und 6b). Fig. 6a u. 6b.

Den Inhalt eines Vierecks aus drei auf einander folgenden Seiten und zwei eingeſchloſſenen Winkeln zu finden.

Auflöſung und Beweis.

Man denke ſich das Viereck durch die Diagonale BD in zwei

Fig. 6a u. 6b. Dreiecke zerlegt, so ist nach einem bekannten trigonometrischen Lehrsatze:

$$J = \frac{AD.\,AB.\,\sin.\,A}{2} + \frac{BC.\,CD.\,\sin.\,C}{2}$$

Weil AD als unbekannt angenommen ist, so müssen wir hierfür eine Gleichung haben und diese finden wir leicht, wenn wir uns AB als Achse denken und den Werth y für D auf zweifache Art ausdrücken, was folgendermaßen geschiehet:

$$AD.\,\sin.\,A \text{ oder } y \text{ von } D = BC.\,\sin.\,B - CD.\,\sin.\,(B + C).$$

Setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung, so erhalten wir:

$$J = \frac{AB.\,BC.\,\sin.B}{2} + \frac{BC.\,CD\,\sin.C}{2} - \frac{AB.\,CD.}{2}\,\sin.\,(A+B).$$

Hätte das Viereck einen einwärts gehenden Winkel, wie Fig. 6 b. bei c, so erhielten wir für

$$J = \frac{AB.\,AD.\,\sin.A}{2} - \frac{BC.\,CD.\,\sin.C,}{2}$$

nämlich die Differenz der beiden Dreiecke DAB und BCD. Hierbei dürfen wir aber nicht übersehen, daß wir im zweiten Gliede nicht den zur Figur gehörenden Winkel C, sondern dessen Supplement zu 4 R. in Rechnung haben und da $\sin.(360 - C) = -\sin. C$ ist, wir das zweite Glied mit dem Zeichen + in Rechnug nehmen müssen, wenn wir die allgemeine Regel, die zur Figur gehörigen inneren Winkel berücksichtigen wollen. Da nun jetzt der Werth für AD ganz auf dieselbe Art wie vorhin gefunden wird, so ergiebt sich auch für den Inhalt die nämliche Formel.

2. Aufgabe. (Fig. 6c und 6d).

Fig. 6c u. 6d. Den Inhalt eines Fünfecks aus vier auf einander folgenden Seiten und den drei von diesen eingeschlossenen Winkeln zu finden.

Auflösung und Beweis.

Man denke sich eine Diagonale, etwa BE gezogen, so wird dadurch das Fünfeck in ein Viereck und in ein Dreieck getheilt,

welche wir bereits zu berechnen wissen. Es ist nämlich $2J =$ Fig. 6c u. 6d.
$AE.\ AB.\ \sin.\ A + CD.\ BC.\ \sin.\ C - DE.\ BC.\ \sin.\ (A + C) +$
$CD.\ DE.\ \sin.\ D.$

Es ist aber $AE.\ \sin.\ A = BC.\ \sin.\ B - CD.\ \sin.\ (B + C)$
$+ DE.\ \sin.\ (B + C + D)$ und wenn dieser Werth substituirt wird:

$$2J^{*}) = + AB.\ BC.\ \sin.\ B + BC.\ CD.\ \sin.\ C + CD.\ DE.\ \sin.\ D$$
$$- AB.\ CD.\ \sin.\ (B + C) - BC.\ DE.\ \sin.\ (C + D)$$
$$+ AB.\ DE.\ \sin.\ (A + B + C).$$

Da in Fig. 7b. bei dem einwärtsgehenden Winkel ganz dasselbe Verhältniß statt findet, wie bei dem Viereck, so braucht dieser Fall nicht mehr besonders erläutert zu werden.

Ebenso wird dem Leser die Entwickelung der Formel überlassen a) wenn das Fünfeck zwei einwärtsgehende Winkel hinter einander hat und b) wenn die zwei einwärtsgehenden Winkel nicht unmittelbar auf einander folgen.

Da das Verfahren bei dem Fortgange und das allgemeine Gesetz zur Berechnung leicht zu entdecken ist, so wollen wir uns mit Ableitung von weiteren Formeln nicht aufhalten und die Regel in Worten ausdrücken:

Wenn in einem nEck $n - 1$ an einander grenzende Seiten und $n - 2$ von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind und man soll daraus den Inhalt des nEcks berechnen: so nehme man das Produkt von je zwei aneinander stoßenden Seiten in den Sinus des eingeschlossenen Winkels, summire alle diese Produkte; sodann nehme man die Produkte von je zwei um eine von einander abstehenden Seiten in den Sinus der Summe der zwei eingeschlossenen Winkel, summire auch diese Produkte, nun nehme man die Summe der Produkte von je zwei um eine Seite weiter auseinander liegenden Seiten in den Sinus der Summe der eingeschlossenen Winkel und fahre damit fort, bis man auf das Produkt der beiden äußersten gegebenen Seiten in den Sinus der Summe aller zwischen

*) Um nicht immer mit 2 in die allgemeine Formel dividiren zu müssen, geben wir den Ausdruck für den doppelten Inhalt.

Fig. 7. ihnen liegenden Winkel gekommen iſt. Alle dieſe Theilſummen bringe man dermaßen zu einer allgemeinen Hauptſumme, daß das erſte Glied derſelben poſitiv, das zweite negativ, und ſofort alle Glieder abwechſelnd poſitiv und negativ werden. Von der ganzen Summe nehme man die Hälfte für den Inhalt der Figur.

Wir wollen dieſe Regel durch ein Beiſpiel erläutern und wählen dazu, die oben ſchon polygonometriſch berechnete Sektion II., welche ein Achteck bildet. Die Formel zur Berechnung dieſes Polygons iſt folgende:

$$
\begin{aligned}
2J = {} & MN.ML.\sin.M + ML.LK.\sin.L + LK.KJ.\sin.K \\
& + KJ.JH.\sin.J. + JH.HG.\sin.H + HG.GF.\sin.G. \\
& - MN.KL.\sin.(M+L) - LM.KJ.\sin.(L+K) - \\
& KL.JH.\sin.(K+J). - KJ.HJ.\sin.(J+H) - JH. \\
& FG.\sin.(H+G). \\
& + MN.KJ.\sin.(M+L+K) + LM.JH.\sin.(L+K+J) + \\
& + KL.HG.\sin.(K+J+H) + KJ.GF.\sin.(J+H+G). \\
& - MN.JH.\sin.(M+L+K+J). \\
& - ML.HG.\sin.(L+K+J+H). - KL.GF.\sin.(K+ \\
& J+H+G). \\
& + MN.KG.\sin.(M+L+K+J+H) + ML.GF. \\
& \sin.(L+K+J+H+G). \\
& - MN.FG.\sin.(M+L+K+J+H+G).
\end{aligned}
$$

Es iſt $M+L \ldots = 339°, 04' = -\sin. 20°, 56'$

„ „ $L+K \ldots = 216°, 32' = -\sin. 36°, 32'$

„ „ $K+J \ldots = 243°, 44' = -\sin. 63°, 44'$

„ „ $J+H \ldots = 357°, 19' = -\sin. 02°, 41'$

„ „ $H+G \ldots = 269°, 17' = -\sin. 89°, 17'$

„ „ $M+L+K \ldots = 411°, 54' = +\sin. 51°, 54'$

„ „ $L+K+J \ldots = 387°, 26' = +\sin. 27°, 26'$

„ „ $K+J+H \ldots = 430°, 09' = +\sin. 70°, 09'$

„ „ $J+H+G \ldots = 440°, 11' = +\sin. 80°, 11'$

„ „ $M+L+K+J \ldots = 582°, 48' = -\sin. 42°, 48'$

„ „ $L+K+J+H \ldots = 573°, 51' = -\sin. 33°, 51'$

„ „ $K+J+H+G \ldots = 513°, 01' = +\sin. 26°, 59'$

Es ist M + L + K + J + H . = 769°, 13′ = + sin. 49°, 13′ Fig. 7.
„ „ L + K + J + H + G . = 656°, 43′ = — sin. 63°, 17′
„ „ M + L + K + J + H + G = 852°, 05′ = + sin. 47°, 55′

log. . . . 9524 = 3,9788194	log. . . . 1233 = 3,0909631
log. . . . 1233 = 3,0909631	log. . . . 3904 = 3,5915098
log. sin. 195° 22 = 9,4232384	log. sin. 143°, 42′ = 9,7723314
6,4930209	6,4548043
— . 3111863	+ 2849734

log. . . . 3904 = 3,5915098	log. . . . 7715 = 3,9873359
log. . . . 7715 = 3,8873359	log. . 12472 = 4,0959361
log. sin. 72°, 50′ = 9,9802081	log. sin. 170° 54′ = 9,1990913
7,4590538	7,1823663
+ 28777550	+ 15218200

log. . . . 12472 = 4,0959361	log. . . . 5146 = 3,7114698
log. . . . 5146 = 3,7114698	log. . 11914 = 4,0760576
log. sin. 186° 25′ = 9,0482786	log. sin. 82° 52′ = 9,9966254
6,8556845	7,7841528
— . 7172730	+ 60834900

log. . . . 9524 = 3,9788194	log. . . . 1233 = 3,0909631
log. . . . 3904 = 3,5915098	log. . . . 7715 = 3,8873359
log. sin. 20°, 56′ = 9,5530105	log. sin. 36°, 32′ = 9,7747288
7,1233397	6,7530278
— 13284330	— 5662754

log. . . . 3904 = 3,5915098	log. . . . 7715 = 3,8873359
log. . 12472 = 4,0959361	log. . . . 5146 = 3,7114698
log. sin. 63°, 44′ = 9,9526685	log. sin. 02°, 41′ = 8,6703932
7,6401144	6,2691989
— 43663080	— 1858656

Fig. 7.

log. . . 12472 = 4,0959361
log. . . 11914 = 4,0760576
log. sin. 89°, 17′ = 9,9999660

8,1719597
+ 148579800

log. . . 9524 = 3,9788194
log. . . 7715 = 3,8873359
log. sin. 51°, 54′ = 9,8959389

7,7620942
+ 57822150

log. . . 1233 = 3,0909631
log. . 12472 = 4,0959361
log. sin. 27°, 26′ = 9,6634335

6,8503327
+ 7084880

log. . . 3904 = 3,5915098
log. . . 5146 = 3,7114698
log. sin. 70°, 09′ = 9,9733980

7,2763776
+ 18896340

log. . . 7715 = 3,8873359
log. . 11914 = 4,0760576
log. sin. 80°, 11′ = 9,9935942

7,9569877
+ 90570700

log. . . 9524 = 3,9788194
log. . 12472 = 4,0959361
log. sin. 42°, 48′ = 9,8321519

7,9069074
— 80706300

log. . . 1233 = 3,0909631
log. . . 5146 = 3,7114698
log. sin. 33°, 51′ = 9,7458712

6,5483041
— 3534306

log. . . 3904 = 3,5915098
log. . 11914 = 4,0760576
log. sin. 26°, 59′ = 9,6567987

7,3243661
+ 21104060

		Fig. 7.
log. . . 9524 = 3,9788194	log. . . 1233 = 3,0909631	
log. . . 5146 = 3,7114698	log. . . 11914 = 4,0760576	
log. sin. 49°, 13′ = 9,8792021	log. sin. 63°, 17′ = 9,9509685	
7,5694913	7,1179892	
+ 37110300	— 13122000	

log. . . 9524 = 3,9788194
log. . 11914 = 4,0760576
log. sin. 47°, 55′ = 9,8705039

7,9253809
+ 84213340.

Von den erſten ſechs Gliedern der Formel ſind zwei negativ geworden, worauf bei der Zuſammenſtellung Rückſicht zu nehmen iſt.

Die fünf negativen Glieder der Formel mit den Sinuſſen von zwei Winkeln ſind ſämmtlich negativ geworden, weßhalb ſie in der Zuſammenſtellung als poſitiv erſcheinen. Die vier poſitiven Glieder, welche die Sinuſſe von drei Winkeln enthalten, ſind alle poſitiv geworden.

Von den drei folgenden negativen Gliedern mit den Sinuſſen von vier Winkeln ſind zwei negativ und eins poſitiv geworden, worauf bei der Zuſammenſtellung geeignete Rückſicht zu nehmen iſt.

Von den zwei poſitiven Gliedern, deren Sinuſſe die Summen von fünf Winkeln enthalten, iſt eins negativ geworden.

Das letzte negative Glied der Formel deſſen Sinus die Summen von ſechs Winkeln enthält, iſt poſitiv geworden und wird deßhalb als negativ aufgeführt.

Fig. 7. Dieses zur Erläuterung der nachstehenden Zusammenstellung.

+	−
2849734	3111863
28777550	7172730
15218200	21104060
60834900	13122000
13284330	84213340
5662754	
43663080	
1858656	
148579800	
57822150	
7084880	
18896340	
90570700	
80706300	
3534306	
37110300	
Sma. + 616453980	128723993
Sma. + 128723993	
2J = 487729987	
J = 243864993.	

Die polygonometrische Rechnung hatte ergeben J = 244129628.

Die Abweichung beträgt die bedeutende Summe von 264635, welche sich jedoch dadurch erklärt, daß das Polygon in den Abscissen nicht sonderlich geschlossen hat, und daß bei der vorstehenden Berechnung die Fehler als unbekannt, nicht berücksichtiget werden konnten.

Wer sich die kleine Mühe giebt, die oben S. 30 vollzogene polygonometrische Berechnung nochmals, jedoch mit den unverbesserten Differenzen der Abscissen auszuführen, wird den Inhalt auf diese Art zu 243874951, und sonach die Abweichung nur zu 9958

finden, welche Differenz gegen das Ganze als unbedeutend anzu- Fig. 7.
sehen ist.

Hieraus allein ergiebt sich schon der sehr große Vortheil der polygonometrischen Berechnung, denn bei dieser wird stets der kleinste Fehler entdeckt und verbessert; das Verfahren ist viel kürzer und übersichtlicher, indem man bei jedem Polygonpunkte genau weiß, wie weit man mit der Berechnung gekommen ist.

Da man bei der trigonometrischen Berechnung stets $n-1$ Seiten und $n-2$ Winkel in Rechnung zu nehmen hat, so ergiebt sich die Zahl der Verbindungen zu zwei durch den Ausdruck $\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}$ und eben so viele Glieder enthält die Formel für die Inhaltsberechnung. Wollte man hiernach ein Polygon von 30 Seiten berechnen, so würde sich $\frac{29.28}{2} = 406$ Glieder ergeben.

Würde man dieses Polygon durch zwei Diagonalen in 4 Neunecke vertheilen, so würden sich die Anzahl der Glieder zu 112 ergeben, mithin um 294 Glieder vermindern. Würde man die Neunecke nochmals durch Diagonalen in 4 Fünfecke und in 4 Sechsecke zerlegen, so würde man nur 64 Glieder zu berechnen haben.

Man siehet also, wie durch die Verminderung der Seiten die Arbeit erleichtert wird. Allein nicht die Erleichterung der Arbeit allein kommt hier in Betracht, sondern die Zuverlässigkeit der Vermessung, welche in gleichem Verhältnisse wächst, wie die Anzahl der Seiten der Figur abnimmt. Es ist dieses der Grund, warum Landesvermessungen auf einzelne Dreiecke, als den einfachsten aller Figuren, und auf deren Verbindungen zu einem Netz von Dreiecken basirt werden. Bei Forstvermessungen ist dieses zwar nicht möglich, allein da, wo man genaue Resultate verlangt, müssen die Polygone auf eine Zahl von Seiten beschränkt werden, wobei sich noch verläßliche Resultate erzielen lassen, ohne die Arbeit durch Detailmessungen zu sehr zu vervielfältigen.

Je weniger Seiten nämlich ein Waldcomplex enthalten soll, desto kleiner wird derselbe entweder an Fläche werden, oder desto

Fig. 7. weiter muß sich der Geometer mit seiner Grundfigur von der Waldgrenze entfernen. Beides ist nicht wünschenswerth, denn ersteres vermehrt die Anzahl der Polygone und letzteres die Vermessung der äußeren, zur Waldfläche nicht gehörigen Parzellen.

Mehr als dreißig Winkel wird indessen ein Waldpolygon nur ausnahmsweise in sehr ungünstigem Terrain enthalten dürfen und kürzere Seiten, als etwa 100 Preußische Ruthen wird der Geometer gerne vermeiden; indem bekanntlich die Sicherheit der Winkelmessung mit der Länge der Seiten zugleich abnimmt. Es können sich indessen Fälle ereignen, wo man sich in einem sehr coupirten Terrain auch mit Linien von 20 — 25 Ruthen begnügen muß, allein dieses sind Ausnahmen, welche die allgemeine Regel nicht aufheben.

§. 5.

Von dem Auftragen der Coordinaten und dem Zeichnen des Kartennetzes.

Ebenso einfach und sicher die Grundgesetze der Polygonometrie in ihren Berechnungen sind, sind sie es auch im Auftragen der Coordinaten und im Zeichnen des Kartennetzes.

Aus der Coordinaten-Zusammenstellung entnehmen wir die längsten positiven und negativen Ordinaten und Abscissen und können hiernach mit Rücksicht auf den gewählten oder vorgeschriebenen Maaßstab die Breite und Höhe des erforderlichen Kartenblattes ganz genau angeben. Wir sind dabei versichert mit unserer Zeichnung nie vom Blatte herunter zu kommen; wir wissen den Anfangs- und Endpunkt der Zeichnung auf das genaueste anzugeben, ja es hindert uns nichts, an jedem beliebigen Punkte des Polygons mit der Arbeit zu beginnen.

Es wird dieses alles durch Behandlung des berechneten Polygons ganz deutlich werden, weßhalb wir hierzu übergehen.

Die größte positive Ordinate war in Sect. I. — 11216
" " negative " " " " II. — 11904

Zus. 23120.

Es stehen sonach die entgegengesetztesten Punkte der Breite um 2312° auseinander und es muß unser Kartenblatt jedenfalls eine solche Höhe haben, daß diese Entfernung nach dem Maaßstabe aufgetragen werden kann. Fig. 7.

Die größte positive Abscisse beträgt 24786'
" " negative " " 478'
Zus. 25254'

oder 2525,4°.

Hiernach wird das Kartenblatt am zweckmäßigsten in Quadratform gewählt und die Achse so gezogen, daß 1121° über und 1190° unterhalb derselben aufgetragen werden können. Sie durchschneidet im vorliegenden Falle die Mitte des Blattes und es können nun die Abscissen vom gewählten Nullpunkte, welcher nur um den Betrag der negativen Theile vom Kartenrande abzustehen braucht, der Reihe nach aufgetragen und mit laufenden Nummern oder den Stationsnamen bezeichnet werden.

Nachdem dieses geschehen, werden die Perpendikel an den entsprechenden Punkten von solcher Länge errichtet, daß sie das Maaß der Ordinaten fassen und dann wird dieses genau abgegriffen und aufgetragen. Weil das richtige Ziehen von mitunter sehr langen Perpendikeln gar keine leichte, und das Abgreifen von bedeutenden, oft bis 2000° langen Linien eine sehr zeitraubende Arbeit ist, so erscheint es viel zweckmäßiger, das ganze Kartenblatt mit einem Quadratnetz zu überziehen, welches je nach der Größe des Maaßstabes von 100 — 500° einzutheilen ist.

Ist der Maaßstab ein 5000theiliger, wo 500 Ruthen auf einen Fuß fallen, so giebt man den Quadraten eine Breite und Höhe von 2 bis 4 Zoll, so daß jede Quadratseite eine Länge von 100 bis 200° faßt.

Ist der Maaßstab kleiner, etwa ein 20000theiliger, wo sonach 2000 Ruthen auf einen Fuß fallen, so kann man die Quadrate so anlegen, daß auf eine Seite 500° fallen, welches einer Entfernung der Senkrechten von 2,5 Decimalzoll entspricht.

Fig. 7. Karten nach noch kleinerem Maßstabe, etwa von 100000 Theilen, werden zweckmäßiger mittelst des Pantographen verjüngt, als aus den Elementen aufgetragen. Die Quadratnetze müssen sehr vorsichtig angefertigt werden, weil davon die Richtigkeit der Karte abhängt. Nachdem man eine Linie durch die Mitte des Blattes gezogen hat, wozu ein sehr genau gefertigtes und abgeglichenes Lineal, am besten von polirtem Eisen, gebraucht wird, theilt man diese Linie mittelst eines guten Stangenzirkels in eine Anzahl gleicher Theile ein, welche eine Länge von höchstens dem doppelten Quadratabstande erhalten. Nach dieser Eintheilung schneidet man mit dem möglichst weit gestellten Stangenzirkel zuerst vom 1ten und 3ten, dann vom 2ten und 4ten, vom 3ten und 5ten Theilpunkte, die Höhenpunkte gleichschenklichter Dreiecke, zuerst oberhalb, dann unterhalb der Achse ab und erhält dadurch die Perpendikel für alle Theilpunkte, mit Ausnahme des ersten und letzten.

Die Perpendikel werden nach vorheriger Prüfung, deren oberen und unteren Abstände ausgezogen, dann ebenso wie die Achse abgetheilt, und nachdem alle Entfernungen derselben richtig befunden worden sind, mit den der Achse Parallelen versehen *).

Hat man solche Quadratnetze angefertigt, eingetheilt und richtig bezeichnet, wozu Fig. 7. bestimmt ist **), so beginnt man mit dem Auftragen der Coordinaten, was jetzt ganz einfach mittelst zweier Zirkel, welche zweckmäßig von verschiedener Form sein mögen, geschiehet.

Man übt sich am besten so ein, daß man in jede Hand einen

---

*) Die Quadratnetze, wozu gutes, vorher auf Leinewand aufgezogenes Papier zu wählen ist, werden am zweckmäßigsten in ganz gleicher Größe auf Rechnung der Forstdirektionsbehörden angefertigt und den Geometern geliefert. Man ist dann sicher, daß stets nur gleichmäßige und richtige Netze verwendet werden.

**) Auf diesem Netzchen messen die Quadratseiten 1,5 Pr. Duodecimalzoll und sind für 500° Länge angenommen. Hiernach beträgt der Maaßstab $\frac{1}{40000}$ der Natur.

Zirkel faßt, in die Rechte den zum Abstechen der Abscissen in die Fig. 7.
Linke den zum Abstechen der Coordinaten.

Nachdem man den Anfangspunkt der Abscissen, in unserer Figur den Punkt F abgestochen hat, greift man die Abscisse für den Punkt E mit dem Zirkel rechter Hand und die Ordinate für denselben Punkt mit dem Zirkel linker Hand ab; setzt den ersteren bei dem Punkte F ein, und sticht die Länge für E auf der Achse ab, die Ordinate wird vom Punkt F auf dem ersten Perpendikel abgestochen und der Abscissenzirkel in den auf die Ordinate abgestochenen Punkt, und der Ordinatenzirkel in dem Längenpunkte für E auf der Achse eingesetzt und nun der Punkt E durch die sich schneidenden Zirkelspitzen bestimmt.

Da y von D = 964°; x von D = 755° beträgt, so greife man für y = 464 und für x = 255° auf dem Maaßstabe ab und setze nun die Zirkel auf dem Durchschnittspunkte für 500 in der Länge und 500 in der Breite ein, und verfahre wie vorher.

Einiges Probiren und Ueben, wird alle weitere lästige Beschreibung unnöthig machen und bald zu einer gewissen Fertigkeit, sowie zur Ueberzeugung führen, daß es kein einfacheres und genaueres Verfahren geben kann, richtige Karten, resp. Kartennetze, zu zeichnen.

Daß schließlich, nachdem sämmtliche Polygonpunkte bestimmt sind, deren Entfernung abgegriffen werden müsse, um sich von der Richtigkeit des Auftragens zu überzeugen, bedarf wohl keiner weiteren Ausführung.

§. 6.

Von Legung und Berechnung eines Dreiecknetzes; Anschluß an die Landesvermessung.

Wenn von einem Lande eine Karte angefertigt und auf dieser Fig. 8.
jedem bemerkenswerthen Punkte — Gegenstand — seine richtige Lage gegeben werden soll, so kann dieses nur durch eine Triangulation, d. h. durch einen Verband von größeren und kleineren Dreiecken, welche ein s. g. Dreiecksnetz bilden, geschehen.

Fig. 8. Bei Vornahme einer Landesvermeſſung werden zuerſt Dreiecke I. Ranges gelegt, deren einzelne Seiten einer Länge bis zu 15 geographiſche Meilen oder 1° der Erdoberfläche erhalten können.

Dieſe Dreiecke, deren erſtes eine ſehr genau gemeſſene Baſis, von wenigſtens 1 Meile oder 2000 Ruthen Länge hat, werden nach ihren drei Winkeln ſehr genau gemeſſen und mehrfach repetirt, ſo daß höchſtens der Fehler in einem ganzen Dreieck 15 — 20 Sekunden beträgt und dann als ſphäriſche Dreiecke berechnet. In größeren Ländern müſſen der Controle wegen mehrere Baſen in den verſchiedenen Landestheilen gemeſſen werden, um die Ueberzeugung zu gewinnen, daß ſich die Dreiecke nicht verſchieben und die berechneten Dreiecks-Seiten mit den gemeſſenen übereinſtimmen. So würde es zweckmäßig ſein, im Preußiſchen Staate wenigſtens 12 bis 16 Baſen zu meſſen, deren jede ſelbſtredend als Seite eines Dreiecks I. oder II. Ordnung erſcheinen muß. Bei Auswahl der Dreiecke iſt ſo viel als möglich Bedacht zu nehmen, daß ſich dieſelben dem gleichſeitigen nähern, denn die Differentialrechnung lehrt, daß in Dreiecken dieſer Art ein Meſſungsfehler den geringſten Einfluß äußert. Die Auswahl und die Beſtimmung der Dreiecke I. Ranges iſt eine der ſchwierigſten und zeitraubendſten Arbeiten des Geodäten und muß mit großer Vor- und Umſicht geſchehen, wenn nicht viel Geld und Zeit vergeblich geopfert werden ſoll.

In dieſes erſte Dreiecknetz wird zum Behuf der Aufnahme der verſchiedenen Stadt- und Ortsgemarkungen, großer Waldungen ꝛc ein zweites Netz von Dreiecken II. Ranges eingeſchoben, wobei gewöhnlich und wo möglich von einer der gemeſſenen Baſen ausgegangen wird. Dieſe Dreiecke erhalten Seiten von $\frac{1}{2}$ bis 1 Meile, ſonach von 1000 — 2000 Ruthen Länge und werden als ebene Dreiecke behandelt. Wo möglich werden alle drei Winkel der Dreiecke mit guten Repetitions-Theodolithen mit einer Genauigkeit von wenigſtens 1 Minute für die drei Winkel gemeſſen. Alle Dreiecke müſſen ſo liegen, daß keine Seite die andere ſchneidet, und daß ſich ſtets ein Dreieckspunkt II. Ordnung an einen Dreieckspunkt

I. Ordnung anschließt. Dieses Netz von Dreiecken II. Ordnung interessirt hauptsächlich den Forstgeometer, denn meist liegen Punkte desselben in der Nähe der Waldgrenze, oft im Walde selbst, auf Bergen oder bei besonderen Signalen, und dienen ihm zum Anschluß der Forstvermessung an die Landesvermessung, wodurch es allein möglich wird, daß auch die Waldungen ihre richtige Lage auf der Landkarte erhalten. Zu forstlichen Zwecken wäre dieses zwar nicht nöthig, allein für die obersten Verwaltungsstellen ist es von großem Interesse auf einen Blick auf der Karte ersehen zu können, wo die Waldungen liegen, und wie sie im Lande vertheilt sind. Fig. 8.

Wenn wir uns gleich mit der Ausführung und Behandlung einer Triangulation, als zu unserem Zwecke nicht gehörig, im Detail nicht befassen können, so halten wir doch für unumgänglich nöthig, daß die dabei zur Anwendung kommenden wichtigsten Lehrsätze vorgetragen und namentlich gezeigt wird, wie und auf welche Art man die Azimuthe für die Forstvermessung aus den Coordinaten der Landesvermessung ableitet, und wie man den Anschluß der Forstvermessung an die Landesvermessung bewerkstelligen kann.

Wir wollen unsere Betrachtungen mit einem für die Correktur von Dreiecksnetzen und Polygonen sehr wichtigen Lehrsatze, beginnen, nämlich

1) Wenn in einem Polygon von beliebig vielen Seiten irgend ein Punkt angenommen wird, so bilden die Winkel am Umfange nach diesem Punkte zwei Reihen, deren Sinusprodukte gleich sind.

Um diesen Satz besser zu verstehen, sei Fig. 8. ein Sechseck, oder eine Verbindung von sechs Dreiecken. Die Winkel links der Stationspunkte heißen $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ ꝛc. und die recht $\beta, \beta', \beta'', \beta'''$ ꝛc. so muß sein sin. α. sin. α'. sin. α''. sin. α'''. sin. α^{IV}. sin. α^{V} = sin. β. sin. β'. sin. β''. sin. β'''. sin. β^{IV}. sin. β^{V}.

Der Beweis ist einfach folgender:

Es sei A G = a, so ist vermöge des bekannten Satzes, daß sich die Seiten wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel verhalten

Fig. 8.

$$BG = \frac{a.\ \sin.\ \beta}{\sin.\ \alpha'}.$$

$$CG = \frac{BG.\ \sin.\ \beta'}{\sin.\ \alpha''} = \frac{a.\ \sin.\ \beta.\ \sin.\ \beta'}{\sin.\ \alpha'.\ \sin.\ \alpha''}.$$

$$DG = \frac{CG.\ \sin.\ \beta''}{\sin.\ \alpha'''} = \frac{a.\ \sin.\ \beta.\ \sin.\ \beta'.\ \sin.\ \beta''}{\sin.\ \alpha'.\ \sin.\ \alpha''.\ \sin.\ \alpha'''}.$$

$$EG = \frac{GD\ \sin.\ \beta'''}{\sin.\ \alpha^{IV}} = \frac{a.\ \sin.\ \beta.\ \sin.\ \beta'.\ \sin.\ \beta''.\ \sin.\ \beta'''}{\sin.\ \alpha'.\ \sin.\ \alpha''.\ \sin.\ \alpha'''.\ \sin.\ \alpha^{IV}}.$$

$$FG = \frac{GE\ \sin.\ \beta^{IV}}{\sin.\ \alpha^{V}} = \frac{a.\ \sin.\ \beta.\ \sin.\ \beta'.\ \sin.\ \beta''.\ \sin.\ \beta'''.\ \beta^{IV}}{\sin.\ \alpha'.\ \sin.\ \alpha''.\ \sin.\ \alpha'''.\ \sin.\ \alpha^{IV}.\ \alpha^{V}}.$$

$$AG = \frac{FG.\ \sin.\ \beta^{V}}{\sin.\ \alpha} = \frac{a.\ \sin.\ \beta.\ \sin.\ \beta'.\ \sin.\ \beta''.\ \sin.\ \beta'''.\ \sin.\ \beta^{IV}\ \sin.\ \beta^{V}}{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \alpha'.\ \sin.\ \alpha''.\ \sin.\ \alpha'''.\ \sin.\ \alpha^{IV} \sin.\ \alpha^{V}}$$

$$= a.$$

Hieraus erhält man:

$$\sin.\ \beta.\ \sin.\ \beta'.\ \sin.\ \beta''.\ \sin.\ \beta'''.\ \sin.\ \beta^{IV}\ \sin.\ \beta^{V} =$$
$$\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \alpha'.\ \sin.\ \alpha''.\ \sin.\ \alpha'''.\ \sin.\ \alpha^{IV}\ \sin.\ \alpha^{V}.$$

Da die Ableitung der Strahllinien immer dieselbe bleibt, so kann der Satz als ganz allgemein angenommen werden, indessen läßt sich derselbe als für ein n Eck richtig, leicht für ein $n + 1$ Eck beweisen.

Werden statt der natürlichen Sinusse die Logarithmen derselben gebraucht, so ist

$$\log.\ \sin.\ \alpha + \log.\ \sin.\ \alpha'. + \log.\ \sin.\ \alpha''. + \ldots \log.\ \sin.\ \alpha^{n} =$$
$$\log.\ \sin.\ \beta + \log.\ \sin.\ \beta'. + \log.\ \sin.\ \beta''. + \ldots \log.\ \sin.\ \beta^{n}.$$

So wie wir die Strahllinien aus den gegebenen Theilen bestimmt haben, so können wir auch die Umfangslinien aus denselben bestimmen.

Es sei z. B. FA als nte Linie des Umfangs zu bestimmen; sie ist $= FG \frac{\sin.\ (\beta^{n} + \alpha^{n})}{\sin.\ \alpha^{n}}$ und wenn wir für FG den bereits ermittelten Werth substituiren, so ist

$$FA = \frac{a.\ \sin.\ \beta.\ \sin.\ \beta'.\ \sin.\ \beta''. + \ldots \sin.\ (\beta^{n} + \alpha^{n})}{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \alpha'.\ \sin.\ \alpha''.\ \sin.\ \alpha''' + \ldots \sin.\ \alpha^{n}.}$$

Durch dieſen Satz erhalten wir ein Hauptmittel zur Prüfung der Richtigkeit einer Triangulation, zugleich auch ein Mittel zur Beſeitigung von Widerſprüchen und Fehlern, deren ſpecielle Begründung uns aber von unſerem Ziele zu weit abführen würde *). Fig. 8.

Wir wollen nun ein Beiſpiel berechnen:

Es ſei $\alpha = 47° 26' 20''$; $\beta = 74° 12' 40''$
$\alpha' = 77° 11' 00''$; $\beta' = 51° 30' 40''$
$\alpha'' = 36° 46' 30''$; $\beta'' = 85° 49' 13''$
$\alpha''' = 56° 42' 20''$; $\beta''' = 38° 15' 10''$
$\alpha^{IV} = 53° 00' 10''$; $\beta^{IV} = 69° 40' 00''$
$\alpha^{V} = 88° 17' 37''$; $\beta^{V} = 41° 08' 20''$

$= 359° 23' 57''$ $= 360° 36' 03''$
$360° 36' 03''$

$720° 00' 00''$

log. sin. α	$= 9{,}8672060$	log. sin. β	$= 9{,}9832973$
log. sin. α'	$= 9{,}9890424$	log. sin. β'	$= 9{,}8936113$
log. sin. α''	$= 9{,}7771905$	log. sin. β''	$= 9{,}9988434$
log. sin. α'''	$= 9{,}9221339$	log. sin. β'''	$= 9{,}7917833$
log. sin. α^{IV}	$= 9{,}9023645$	log. sin. β^{IV}	$= 9{,}9720579$
log. sin. α^{V}	$= 9{,}9998074$	log. sin. β^{V}	$= 9{,}8181510$
Summa	$9{,}4577447$	Summa	$9{,}4577442$

Der Unterſchied beträgt 5, was für Nichts zu achten iſt.

Bemerkt ſei noch, daß bei Berechnung von Dreiecken, bei dieſen nicht nur die Winkelprobe nach der Summe der drei Winkel der einzelnen Dreiecke, ſondern auch nach der um einen gemeinſchaftlichen Punkt G liegenden Summe zu 360° und nach dem von einem Verbande von Dreiecken gebildeten Polygone zuſammen zu ſtellen und erſt nach Vornahme der logarithmiſchen Sinus-Summen-Probe zu corrigiren und etwaige Widerſprüche zu beſeitigen ſind.

*) Wer ſich mit Triangulation beſchäftigt und die Mittel und Wege kennen lernen will, um Widerſprüche, Irrthümer und Fehler zu beſeitigen, muß das Handbuch für Geometer von Schiereck. Köln, ſtudiren und benutzen.

Fig. 8. Der Verband von Dreiecken oder das Dreiecksnetz wird schließlich als Ein Polygon angesehen und als solches berechnet. Die inneren Punkte werden nach Sektionen oder Routen berechnet.

2) Um zu einer Forstvermessung, welche sich an die Landesvermessung anschließen soll, die Azimuthe ableiten zu können, müssen die Coordinaten von einigen Dreieckspunkten bekannt, d. h. gegeben und von einem Dreieckspunkte die nöthigen Anschlußwinkel gemessen werden:

Fig. 9. Es seien A. B. u. C. Fig. 9. die ein Dreieck der Landesvermessung bildendenden Punkte. Die Achse sei NS, folglich $\triangle y$ von A = AE und $\pm \triangle x$ von A = BE je nachdem man die Länge von Norden nach Süden oder umgekehrt für positiv annimmt.

Es ist nun tang. $\alpha = \frac{\triangle y}{\triangle x} =$ Az. B.

tang. $\alpha' = \frac{\triangle y'}{\triangle x'}$ und Az. A nach C $= 180° - \alpha'$ oder auch Az. B + äußerer Winkel BAC $- 180°$. Ist nun bei C ein Anschlußwinkel durch AC nach I an den Wald, so wird auch Az. C nach I durch Az. A und den gemessenen Anschlußwinkel leicht gefunden.

Im Laufe der Forstvermessung wird jeder mögliche Anschluß an die Landesvermessung bewirkt, indem hierdurch Controle sowohl für die Azimuthe, als auch für die Coordinaten entstehet.

Liegen, wie es nicht selten vorkömmt, Dreieckspunkte auf Hügeln und Bergen ganz in der Nähe der Waldgrenze, so kann man oft mit einem kleinen Dreieck den Anschluß bewirken, wie
Fig 10. dieses die Fig. 10. nachweiset. Es ziehet die Waldgrenze von A über B und es liegt der Punkt II Eschberg kaum 80 — 100 Ruthen vom Walde entfernt. Man wähle eine Linie des Hülfsvielecks als Dreiecksseite und lege ein kleines Dreieck an, worin man eine Seite bereits gemessen hat und die drei Winkel leicht messen kann. Kann eine oder die andere Linie von A nach Pctm. trig. oder B nach Pctm. trig. leicht und sicher gemessen werden, so unterlasse man dieses nicht und beobachte auf dem Dreiecks-Punkte auch noch einen Winkel nach dem nächsten Punkte der Landesvermessung,

um auch hier wieder das Azimuth prüfen und erforderlichen Falles Fig. 10.
berichtigen zu können.

Liegt derjenige Dreieckspunkt, an welchen ein Anschluß bewirkt werden soll, schon so weit von der Waldgrenze ab, daß man mit einer Hülfslinie als Dreieckslinie nicht ausreicht, so verbindet man eine Mehrzahl von Punkten der Forstvermessung und nimmt die Diagonale zur Dreiecksseite, wie dieses die Fig. 11. näher ersehen Fig. 11.
läßt. Aus den Linien AB, BC, CD, DE, den eingeschlossenen und anliegenden Winkeln berechnet man sich AE und aus dieser Linie und den angeschlossenen Dreieckswinkeln, eine oder beide Seiten des eingeschobenen Dreiecks. Daß vom Dreieckspunkte abermals ein Anschlußwinkel an den nächstgelegenen Dreieckspunkt gemessen wird, versteht sich ganz von selbst.

3) Sollte man auf diese Art nicht zum Ziele kommen, so bleibt oft nur übrig, aus der Lage von drei Punkten die Lage eines vierten Punktes zu finden, was auf vielfach verschiedene Art geschehen kann.

Wir wollen die Lage der drei bekannten Punkte A, B, C gegen den vierten Punkt D, wo sich der Beobachter befindet, durch die Fig. 12a. 12b. 12c. 12d. näher erläutern und bemerken, daß Fig. 12. a. b. c. d.
von D aus die beiden bezeichneten Winkel α und β gemessen werden. Sollte sich der Beobachter im Inneren der drei gegebenen Punkte befinden, wie dieses bei Fig. 12c. der Fall ist, so wird auch noch der dritte Winkel γ gemessen.

Da uns in dem Viereck ABCD nur zwei Seiten und zwei Winkel, wovon der eine in zwei Theile zerfällt, gegeben sind, so gehört die Aufgabe zu den zweifelhaften, und daß sie dieses in der That ist, werden wir später in einem Beispiele darthun.

Es sei $< BAC = A$ *), $AC = b$, $AB = c$
$< CAD = x$, sonach $DAB = A - x$.

In dem Dreieck ACD, Fig. 12a. u. 12b. ist:

$$AD : AC = \sin. DCA : \sin. ADC$$
$$AD : b = \sin. (\beta + x) : \sin. \beta$$

in dem Dreieck BAD ist:

*) In Fig. 12. a. heißt der innere Winkel CAB = A.

Fig. 12. a. b. c. d.

$$AD : AB = \sin. ABD : \sin. BDA$$
$$AD : c = (\alpha + A - x) : \sin. \alpha$$
$$AD = \frac{b. \sin. (\beta + x)}{\sin. \beta} = \frac{c \sin. (\alpha + A - x)}{\sin. \alpha}$$

Aus diesen Gleichungen müssen wir x zu finden suchen, wodurch dann AD gegeben. Man setze beide Werthe für AD gleich und entferne die Nenner, so ist: b. sin. α sin. $(\beta + x) =$ c. sin. β. sin. $(\alpha + A - x)$.

Aus dieser Gleichung bilden wir die Proportion:

sin. $(\beta + x)$: sin. $(\alpha + A - x) =$ c. sin. β : b. sin. α, welche sich in folgende verändern läßt:

sin. $(\beta + \alpha) +$ sin. $(\alpha + A - x)$: sin. $(\beta + x) -$ sin. $(a + A - x)$ $=$ c. sin. $\beta +$ b. sin. a : c. sin. $\beta -$ b. sin. α.

Nun verhält sich aber nach einem bekannten trigonometrischen Satze: die Summe der Sinusse zweier Winkel zur Differenz der Sinusse dieser Winkel, wie die Tangente der halben Summe der beiden Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.

Wir können deßhalb auch setzen:

$$\sin. (\beta + x) + \sin. (\alpha + A - x) : \sin. (\beta + x) - \sin. (\alpha + A - x) =$$
$$= \text{tang.} \left(\frac{\beta + x + \alpha + A - x}{2} \right) : \text{tang.} \left(\frac{\beta + x - (\alpha + A - x)}{2} \right)$$

und es ist sonach auch:

$$c. \sin. \beta + b. \sin. \alpha + : c. \sin. \beta - b. \sin. \alpha = \text{tang.} : \left(\frac{\beta + \alpha + A}{2} \right) :$$
$$\text{tang.} \left(x + \frac{\beta - \alpha - A}{2} \right)$$

woraus folgt:

$$\text{tang.} \left(x + \frac{\beta - \alpha - A}{2} \right) = \frac{c. \sin. \beta - b. \sin. \alpha}{c. \sin. \beta + b. \sin. \alpha} . \text{tang.} \left(\frac{\beta + \alpha + A}{2} \right)$$

Ist durch dieses Verfahren $x + \frac{\beta - \alpha - A}{2} = M$ gefunden, so kennt man auch $x = M - \frac{\beta + a + A}{2}$.

Hätten wir oben den Winkel ABD = x und den gegenüber- Fig. 12. a. b. c. d.
liegenden Winkel DCA = 360 — A — α — β — x = q — x gesetzt, so würden wir erhalten haben:

$AD = \frac{b.\sin.(q-x)}{\sin.\beta} = \frac{c.\sin.x}{\sin.\alpha}$ folglich: b. sin. α. sin. (q — x) = c. sin. β sin. x. — Nun sin. (q—x) entwickelt und auf beiden Seiten der Gleichung mit sin. x dividirt giebt $\cotg.\, x = \frac{c.\sin.\beta}{b.\sin.\alpha \sin.q} + \cotg.\, q$, wobei auf das Zeichen der Cotangente wohl zu achten ist.

Wir wollen nunmehr ein Beispiel nach dem ersten Verfahren ausrechnen.

Es sei Fig. 12c., $< \beta = 121°, 06'$; $\alpha = 124°, 32'$.

Es sei ferner $c = 7936'$; $b = 6248' < A = 62°, 22'$.

Es ist jetzt: $\frac{\alpha+\beta+A}{2} = 154°, 10'$; $\frac{\beta-\alpha-A}{2} = -32°, 44'$

daher $\tang. \frac{\alpha+\beta+A}{2} = \tang. 154°, 10' = \tang. -25°, 50' =$

$= -\tang. 25°, 50'$; es ist weiter

c. sin. $\beta = 7936'$. sin. $121°, 26' = 6771$

b. sin. $\alpha = 6248'$. sin. $124°, 32' = 5147$,

daher c. sin. β + b. sin. α = 11918

c. sin. β — b. sin. α = 1624, folglich

$\tang.(x - 32°, 44') = -\tang. \frac{25°, 50'. 1642}{11918} = -\tang. 3°, 46', 30''$,

und es ist sonach auch

$x - 32°, 44' = -3°, 46', 30''$; $x = 28°, 57', 30''$.

Es ist also jetzt

$AD = \frac{b.\sin.(\beta+x)}{\sin.\beta} = \frac{6248.\sin. 150°, 23'}{\sin. 121°, 26'} = 3619'.$

$DC = \frac{b.\sin.x.}{\sin.\beta} = \frac{6248.\sin. 28°, 57'}{\sin. 121° 26'} = 3544'.$

$BD = \frac{c.\sin.(A-x)}{\sin.\alpha} = \frac{7936.\sin. 33°, 25'}{\sin. 124°, 32'} = 5305'.$

Fig. 12. a. b. c. d.

Rechnen wir jetzt folgendes Beispiel nach der Formel

$$\text{cotang. } x = \text{cotang. } q + \frac{\text{c. sin. } \beta}{\text{b. sin. } \alpha \text{ sin. } q}$$ und setzen

$AB = c = 1064{,}1$; $AC = b = 1174{,}2$
$< A = 95°, 50'$; $\beta = 44°, 31'$; $\alpha = 39°, 30'$ $< ACD = q$
$< ABD = x$

log. c = log. 1064,1 = 3,0269824
log. sin. β = log. sin. 44°, 31′ = 9,8457903

12,8727727 — 10

log. b = log. 1174,2 = 3,0697421
log. sin. α = log. sin. 39°, 30′ = 9,8035105
log. sin. q = log. sin. 180°, 09′ = −7,4179681

20,2912207 — 20

Diff. 2,5815520 = — log. 381,5504
log. cotg. q = log. cotg. 180°, 09′ = 12,5820304 — 10 = log. 381,9710

cotg. x = + 0,4206..

log. 0,4206 = 0,6238693 — 1 = log. cotg. x
und cotg. x = 67°, 11′, 20″.

Da $x = 67°, 11', 20''$, so ist $< C = 360° - 95°, 50' - 44°, 31' - 39°, 30' - 67°, 11' = 112°, 58'$
$DAB = 180° - 67°, 11' - 39°, 30' = 73°, 19'$

$$BD = \frac{\text{c. sin. DAB}}{\text{sin. } \alpha}\ ;\ DC = \frac{\text{b. sin. (A} - \text{DAB)}}{\text{sin. } \beta}$$

log. . . 1064,1	= 3,0269824	log. . . 1172,0	= 3,0697421
log. sin. 73°, 19′	= 9,9813229	log. sin. 22°, 31′	= 9,5831445
comp. log. sn. 39°, 30′	= 0,1964895	comp. log. sn. 44°, 31′	= 0,1542097
	3,2047948		2,8070963
	= log. 1602,5.		= log. 641,35.

Verändert man den $< \alpha$ nur um eine Minute und setzt denselben $= 39°, 29'$, so ergiebt sich log. c + log. sin. β = 12,8727727 — 20

Uebertrag . . . . . 12,8727727 — 20 Fig. 12. a. b. c. d.
log. . . b = log. . . . 1174,2 = 3,0697421
log. sin. α = log. sin. 39°, 29′ = 9,8033572 — 10
log. sin. q = log. sin. 180°, 10′ = 7,4637255 — 10

20,3368248 — 20

Diff. = 12,5359479 — 10 = — log. 343,517.
log. cotg. 180°, 10′ = 12,5362727 — 10 = + log. 343,774
cotg. x = + 0,257
cotg. 75°, 35′.

Die Abweichung von dem obigen Resultate beträgt 8°, 24′ sonach ganz unzuverlässig.

Diese Unzuverlässigkeit rührt daher, weil q sehr wenig von 2 R. abweicht, die Cotangenten von sehr kleinen Winkeln aber unverhältnißmäßig stark abnehmen.

Weil die Verbindung von einem Punkte mit drei gegebenen Punkten oder das s. g. Rückwärtsabschneiden nicht ohne Zweifel ist und in dem Falle, wo die gegenüberliegenden Winkel 2 R. betragen, ganz unbestimmt wird, indem dann die vier Punkte ein Kreisviereck bilden, wo der Punkt D in jedem beliebigen Punkte des Umfangs gewählt, immer dasselbe Maaß behält, so muß dem praktischen Geometer erwünscht sein, Mittel und Wege kennen zu lernen, sich in schwierigen Fällen auf andere Art zu helfen, und dazu soll zunächst die folgende Aufgabe dienen.

4) Es seien A, B, C, Fig. 13., die drei gegebenen Punkte der Fig. 13. Landesvermessung. Man habe um sich an dieselbe anzuschließen, eine Linie DE gewählt, von deren Endpunkten man aber nicht nach den drei gegebenen Punkten, sondern nur nach je zwei derselben sehen und Winkel messen kann, sonach von D nur nach A und C und von E nur nach B und C. Demgemäß seien die in der Figur bezeichneten Winkel α, β, γ u. δ gemessen; und es soll der Winkel x berechnet werden, um dann die Längen DA, DC und DE ableiten zu können.

Bilden wir uns zunächst eine Gleichung, indem wir setzen $CD : CE = \sin. \gamma : \sin. \beta$. Es ist aber $CD = \frac{b. \sin. x}{\sin. \alpha}$ und

Fig. 13. $CE = \frac{a.\ \sin.\ y}{\sin.\ \delta}$ folglich $\frac{b.\ \sin.\ x}{\sin.\ \alpha} : \frac{a.\ \sin.\ y}{\sin.\ \delta} = \sin.\ \gamma : \sin.\ \beta$;

setzen wir für y seinen Werth nämlich 540° oder 6 R. — C — D — E — x und für den bekannten Theil dieses Ausdrucks = q, so erhält man, die Produkte der mittleren und äußeren Glieder gleich gesetzt, und die Glieder worin der Winkel x vorkömmt auf die eine Seite der Gleichung gebracht $\frac{a.\sin.\ \alpha.\sin.\ \gamma}{b.\sin.\beta.\sin.\ \delta} = \frac{\sin.\ x}{\sin.(q-x)}$.

Nimmt man den ersten Theil der Gleichung, nämlich $\frac{a.\ \sin.\ \alpha\ \sin.\ \gamma}{b.\ \sin.\ \beta.\ \sin.\ \delta} =$ tang. φ an und berechnet hieraus den Hülfswinkel φ, so wird

$$\text{tang. } \varphi = \frac{\sin.\ x.}{\sin.\ (q - x)}.$$

Ziehen wir diese Ausdrücke einmal von 1 ab, und addiren sie einmal zu 1, so erhalten wir: $1 - \text{tang. } \varphi = 1 - \frac{\sin.\ x}{\sin.\ (q - x)}$

$$1 + \text{tang. } \varphi = 1 + \frac{\sin.\ x}{\sin.\ (q - x)}.$$

Wird nun sin. (q — x) aufgelößt und die Gleichungen unter gleichen Nenner gebracht, so wird

$$1 - \text{tang. } \varphi = \frac{\sin.\ q.\ \cos.\ x - \sin.\ x.\ \cos.\ q - \sin.\ x}{\sin.\ q.\ \cos.\ x - \sin.\ x.\ \cos.\ q} =$$

$$= \frac{\sin.\ q.\ \cos.\ x - (1 + \cos.\ q)\ \sin.\ x}{\sin.\ q.\ \cos.\ x - \sin.\ x.\ \cos.\ q} \text{ und}$$

$$1 + \text{tang. } \varphi = \frac{\sin.\ q.\ \cos.\ x + (1 - \cos.\ q)\ \sin.\ x}{\sin.\ q.\ \cos.\ x - \sin.\ x.\ \cos.\ q.}.$$

Es ist sonach auch

$$\frac{1 - \text{tang. } \varphi}{1 + \text{tang. } \varphi} = \text{cotg. } (45° + \varphi) =$$

$$= \frac{\sin.\ q.\ \cos.\ x - (1 + \cos.\ q)\ \sin.\ x}{\sin.\ q.\ \cos.\ x + (1 - \cos.\ q)\ \sin.\ x}.$$

Wird dieser Ausdruck zuerst durch cos. x und dann durch 1 + cos q dividirt so erhalten wir

$$= \frac{\frac{\text{sin. q.}}{1+\text{cos. q}} - \text{tang. x}}{\frac{\text{sin. q}}{1+\text{cos. q}} + \frac{1-\text{cos. q}}{1+\text{cos. q}}\,\text{tang. x.}}$$

Fig. 13.

Nun ist $\frac{\text{sin. q}}{1+\text{cos. q}} = \frac{2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\text{q.}\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}\text{q}}{2\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}\text{q}^2} = \text{tang.}\,\frac{1}{2}\text{q}$

und $\frac{1-\text{cos. q}}{1+\text{cos. q}} = \text{tang.}\,\frac{1}{2}\text{q}^2$ folglich

$$\text{cotg. } (45^\circ + \varphi) = \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\text{q} - \text{tang. x}}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\text{q} + \text{tang.}\,\frac{1}{2}\text{q}^2\,\text{tang. x}} =$$

$$= \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\text{q} - \text{tang. x}}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\text{q}\,(1+\text{tang.}\,\frac{1}{2}\text{q})\,\text{tang. x}}$$ sonach

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\text{q. cotg. } (45^\circ + \varphi)\,\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\text{q} - \text{tang. x}}{(1+\text{tang.}\,\frac{1}{2}\text{q})\,\text{tang. x}}$$

Multiplicirt man den Ausdruck rechter Hand in Zähler und Nenner mit cos. x. cos. $\frac{1}{2}$q, so erhält man

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\text{q. cotg. } (45^\circ + \varphi) = \frac{\text{sin.}\,\frac{1}{2}\text{q. cos. x} - \text{cos.}\,\frac{1}{2}\text{q. sin. x}}{\text{cos.}\,\frac{1}{2}\text{q. cos. x} + \text{sin.}\,\frac{1}{2}\text{q. sin. x}}$$

$$= \frac{\text{sin. }(\frac{1}{2}\text{q} - \text{x})}{\text{cos. }(\frac{1}{2}\text{q} - \text{x})} = \text{tang. }(\tfrac{1}{2}\text{q} - \text{x}).$$

Hiernach ist tang. $(\frac{1}{2}\text{q} - \text{x})$, folglich auch $(\frac{1}{2}\text{q} - \text{x})$ in bekannten Größen gegeben und da $\frac{1}{2}\text{q} = \frac{540 - (\text{C} + \alpha + \beta + \gamma + \delta)}{2}$ bekannt, so kennt man auch den Winkel x.

Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß die Winkel α, β, γ u. δ sehr genau gemessen werden müssen, wenn man zuverlässige Resultate erhalten will.

5) Sollte man nicht drei Punkte der Landesvermessung, sondern nur zwei derselben von einer gewählten Standlinie aus sehen können, so kann die Ableitung einer Basis und die Verbindung auf folgende Art geschehen.

Es seien A und B, Fig. 14, zwei ihrer Lage und Entfer- Fig. 14.
nung nach bekannte Dreieckspunkte; man wähle eine schicklich gele-

Fig. 14. gene Standlinie CD von deren Endpunkten man die Winkel α, β, γ u. δ genau messen kann. Man könnte nun auf ähnliche Art wie bei den vorhergehenden Aufgaben den Winkel BAC bestimmen und dann auch den Winkel DBA aus lauter bekannten Winkelgrößen berechnen. Zweckmäßiger aber dürfte es sein, die Differenz der Winkel BAC und DBA, oder wenn der letztere Winkel größer als der erstere sein sollte, $DBA - BAC = 2\varphi$ zu setzen und diese Größe zu bestimmen, zu welchem Behufe wir folgende Betrachtungen anstellen wollen. Nach dem unter 1. dieses §. vorgetragenen Satze sind die Produkte der Sinusse der gleichliegenden Winkel gleich, nämlich:

$$\sin. ACB. \sin. DBA. \sin. CAD. \sin. BDC =$$
$$= \sin. DCA. \sin. CBD. \sin. BAC. \sin. ADB.$$

Berücksichtigen wir nun, daß $< CBD = 2R. - (\alpha + \beta + \gamma)$. $< CAD = 2R. - (\beta + \gamma + \delta)$, $< BAC - DBA = 2\varphi$ und $DBA + BAC = (\beta + \gamma)$, weil die Scheitelwinkel im Durchschnittspunkt E sich gleich sind. Es ist sonach

$$< DBA = \frac{\beta + \gamma}{2} - \varphi \text{ und } < BAC = \frac{\beta + \gamma}{2} + \varphi.$$

Setzen wir diese Werthe in die obige Gleichung und berücksichtigen wir, daß die Sinusse von Nebenwinkeln gleich sind, so ist

$$\sin. \alpha. \sin. \left(\frac{\beta + \alpha}{2} - \varphi\right) \sin. (\beta + \gamma + \delta). \sin. \gamma =$$
$$= \sin. \beta. \sin. (\alpha + \beta + \gamma). \sin. \left(\frac{\beta + \gamma}{2} + \varphi\right) \sin. \delta.$$

Wird in dieser Gleichung φ abgesondert und durch cos. φ dividirt, so erhält man

$$\sin. \alpha. \sin. (\beta + \gamma + \delta). \sin. \gamma \sin. \left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) - \sin. \alpha \sin. (\beta + \gamma + \delta).$$
$$\sin. \gamma. \cos. \left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) \text{tang. } \varphi.$$
$$= \sin. \beta. \sin. (\alpha + \beta + \gamma) \sin. \delta \sin. \left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) + \sin. \beta. \sin. (\alpha + \beta + \gamma)$$
$$\sin. \delta. \cos. \left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) \text{tang. } \varphi.$$

Hieraus den Werth von tang. φ genommen, giebt Fig. 14.

$$\text{tg.}\varphi = \frac{\sin.\alpha.\sin.(\beta+\gamma+\delta).\sin.\gamma.\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) - \sin.\beta.\sin.(\alpha+\beta+\gamma).\sin.\delta.\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin.\alpha.\sin.(\beta+\gamma+\delta).\sin.\gamma.\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) + \sin.\beta.\sin(\alpha+\beta+\gamma).\sin.\delta.\cos.\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin.\alpha.\sin.(\beta+\gamma+\delta).\sin.\gamma. - \sin.\beta.\sin.(\alpha+\beta+\gamma)\sin.\delta.}{\sin.\alpha.\sin.(\beta+\gamma+\delta).\sin.\gamma. + \sin.\beta.\sin.(\alpha+\beta+\gamma)\sin.\delta.}\text{tang.}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) =$$

$$= \frac{1 - \frac{\sin.\beta.\sin.(\alpha+\beta+\gamma)\sin.\delta}{\sin.\alpha.\sin.(\beta+\gamma+\delta)\sin.\gamma}}{1 + \frac{\sin.\beta.\sin.(\alpha+\beta+\gamma)\sin.\delta}{\sin.\beta.\sin.(\beta+\gamma+\delta)\sin.\gamma}}\text{tang.}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right).$$

Betrachtet man den Werth von $\frac{\sin.\beta.\sin.(\alpha+\beta+\gamma)\sin.\delta}{\sin.\alpha.\sin.(\beta+\gamma+\delta)\sin.\gamma}$ als die Tangente eines Winkels ψ, so verwandelt sich der obige Ausdruck in folgenden tang. $\varphi = \frac{1-\text{tang.}\psi}{1+\text{tang.}\psi}\cdot\text{tang.}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$. Es ist aber $\frac{1-\text{tang.}\psi}{1+\text{tang.}\psi} = \text{tang.}(\frac{1}{4}\text{R} - \psi) = \text{tang.}(\psi - \frac{1}{4}\text{R})$; wenn also ψ bestimmt ist, wird tang. φ = tang. $(\frac{1}{4}\text{R} - \psi)$. tang. $\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$.

Ist φ bestimmt, so wird $\text{AC} = \frac{\text{AB. sin. ABC}}{\text{sin. ACB}} = \frac{\text{CD. sin. ADC}}{\text{sin. CAD}}$ folglich auch AB. sin. ABC. sin. CAD = CD. sin. ADC. sin. ACB, woraus DC leicht abgeleitet werden kann.

Wir wollen das ganze Rechnungsverfahren durch folgendes Beispiel erläutern. Es sei

$\text{ACB} = \alpha = 61^\circ, 35', 20''$; $\text{DCA} = \beta = 43^\circ, 19', 40''$;
$\text{BDC} = \gamma = 68^\circ, 12', 50''$; $\text{ADB} = \delta = 46^\circ, 23', 00''$
$\text{AB} = 5748{,}00.$

Die zunächst zu bestimmende Tangente ψ wird durch folgenden Ausdruck gefunden

$$\log.\frac{\sin.(43^\circ, 19', 40'').\sin.(46^\circ, 23', 00'').\sin.(173^\circ, 07', 50'')}{\sin.(61^\circ, 35', 20'').\sin.(68^\circ, 12', 50'').\sin.(157^\circ, 55', 30'')}$$

Fig. 14. lg. sin. 43°, 19′, 40″ = 9,8364324; lg. sin. 61°, 35′, 20″ = 9,9442637
lg. sin. 46°, 23′, 00″ = 9,8597213; lg. sin. 68°, 12′, 50″ = 9,9678174
lg. sin. 173°, 7′, 50″ = 9,0777580; lg. sin. 157°, 55′, 30″ = 9,5749798

Summa = 28,7739117 Summa = 29,4870609
29,4870609

Diff. log. tang. ψ = 9,2868508 = log. tang. 10°, 57′, 20″.

Diesen Winkel von 45° abgezogen giebt 34°, 02′, 40″ und tang. 34°, 02′, 40″. tang. 55°, 46′, 15″ = tang. φ.

log. tang. 34°, 02′, 40″ = 9,8297139
log. tang. 55°, 46′, 15″ = 0,1672717
log. tang. φ = 9,9969856 = 44°, 48′, 04″

und hierdurch erhält man

$$CD = \frac{AB.\ \sin.\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+\varphi\right)\ \sin.\ (\beta+\gamma+\delta)}{\sin.\ (\gamma+\delta)\ \sin.\ \alpha} =$$

$$= \frac{5748{,}00.\ \sin.\ 17°, 50′, 23″.\ \sin.\ 22°, 04′, 30″}{\sin.\ 114°, 35′, 50″.\ \sin.\ 61°, 35′, 20″}$$

log. . . . . 5748,00 = 3,7595168
log. sin. . . 17°, 50′, 23″ = 9,4862254
log. sin. . . 22°, 04′, 30″ = 9,5749798
compl. log. sin. 114°, 35′, 50″ = 0,0413117
compl. log. sin. 61°, 35′, 20″ = 0,0557363
log. CD = 2,9177720 u. CD = 827,5.

Da bei dieser Auflösung von der Bestimmung des Winkels φ alles abhängt, diese aber nicht immer zweifellos ist, so wird es gut sein, sich stets von der Richtigkeit zu versichern, was durch die Summe der Logarithmen von den Sinussen geschehen kann, nämlich

$$\text{log. sin. } \alpha + \text{log. sin.}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\varphi\right)+\text{lg. sin.}(\beta+\gamma+\delta)+\text{lg. sin. }\gamma =$$

$$= \text{log. sin. } \beta + \text{log. sin.}(\alpha+\beta+\gamma)+\text{lg. sin.}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}+\varphi\right)+\text{lg. sin. }\delta.$$

Da diese Logarithmen meist alle schon bekannt sind, so ist die Probe nicht aufenthältlich.

Die erste Summe giebt 8,7664778
die zweite „ „ 8,7664767.

Es ist sonach φ richtig bestimmt. Man kann aber auch aus AB und den bekannten Winkeln zwei Diagonalen und aus diesen wieder die Linie DC berechnen *). Fig.14.

Nicht immer kann man der neuen Standlinie CD, die in der Figur verzeichnete Lage geben, denn oft liegen die bekannten Punkte mehr schräge, zuweilen liegt der eine vor- der andere rückwärts, so daß die zu wählende Standlinie die Linie AB durchschneidet. Wir wollen diesen letzten Fall noch näher erläutern und wählen hierzu die Fig. 15. Vergleichen wir diese Figur mit der vorhergehenden, so finden wir, daß wir auch hier vier Winkel messen, allein es sind dieses nicht geradezu die inneren Figurenwinkel. Fig.15.

In unserer neuen Figur ist ACB oder α gleich der ganze Winkel bei C. Winkel DCA oder β ist jetzt 360° — ACD. Winkel BDC oder γ ist auch in der neuen Figur BDC und Winkel ADB oder δ ist der ganze äußere Winkel bei D.

Dagegen ist jetzt $< ADC = \gamma + \delta$ der punktirte Winkel ADC und $< DCB$ oder $\alpha + \beta$ ist jetzt der innere Winkel bei DCB.

Wenn man sich stets den vorhergehenden Punkt als linkes, den folgenden als rechtes Signal denkt, so wird man bei dem Messen der Winkel nie irre werden, und wenn man auf die Zeichen der trigonometrischen Funktionen achtet, so wird man auch die Rechnung richtig führen.

Weil dieser Fall wirklich etwas verwickelt ist, so wollen wir auch hiernach ein Beispiel behandeln.

Es sei $< DCB = 63^\circ, 54'$; $ACD = 58^\circ, 30'$; $BDC = 44^\circ, 06'$; und $CDA = 54^\circ, 54'$.

*) Ebenso kann man die Linie CD vorläufig als bekannt, z. B. = 1000 annehmen und hieraus, sowie aus den anliegenden Winkeln zuerst die Seite DB, dann die Seite AD und aus diesen Linien und dem eingeschlossenen Winkel δ die Seite AB berechnen. Ist dieses geschehen, dann schließt man folgendermaßen: Das berechnete Maaß der Linie AB verhält sich zu dem wirklichen Maaß derselben, wie das angenommene Maaß der Linie CD zu ihrem wirklichen Maaße.

Fig. 15. Hiernach ist $< ACB = \alpha = 63°, 54' + 58°, 30' = 122°, 24'$
$< DCA$ oder $\beta = 360° - 58°, 30' = 301°, 30'$;
$< BDC$ oder $\gamma = 44°, 06'$; $< ADB$ oder $\delta = 360 - 44°, 06' - 54°, 54' = 261°, 00''$.

Die Tangente des zunächst zu bestimmenden Winkels ist

$$= \frac{\sin.\beta.\ \sin.(\alpha+\beta+\gamma)\ \sin.\delta}{\sin.\alpha.\ \sin.(\beta+\gamma+\delta)\ \sin.\gamma} =$$

$$= \frac{\sin. 301°, 30'.\ \sin. 108°, 00'.\ \sin. 261°, 00''}{\sin. 122°, 24'.\ \sin. 246°, 36'.\ \sin.\ 44°, 06'.}$$

log. sin. 301°, 30′ = 9,9307658 log. sin. 122° 24′ = 9,9265112
log. sin. 108°, 00′ = 9,9782063 log. sin. 246° 36′ = 9,9627266
log. sin. 261°, 00′ = 9,9946199 log. sin. 44°, 06′ = 9,8425548
+29,9035920 −29,7317926
−29,7317926
− 0,1717994 = − log. tang. 56°, 03′.

Diese Tangente ist negativ, weil im Zähler zwei und im Nenner ein negativer Sinus vorkommen; sie ist von 180° abzuziehen und berechnet sich sonach zu 123°, 57′. Hiervon sind 45° abzuziehen und verbleiben sonach für $\psi - \frac{1}{2}R = 78°, 57'$. Nun ist

tang. $(\psi - \frac{1}{2}R)$. tang. $(\beta+\gamma)$ = tang. φ, also

log. tang. 78°, 57′ = 10,7093287
log. tang. 172°, 48′ = 9,1015044
9,8108331 = log. tang. φ u. $\varphi = 32°, 54'$.

Um uns zu überzeugen, daß $< \varphi$ richtig bestimmt ist, machen wir die Probe, nämlich:

log. sin. α + log. sin. $\left(\frac{\beta+\gamma}{2} - \varphi\right)$ + log. sin. $(\beta+\gamma+\delta)$ log. sin. γ =
log. sin. β + log. sin. $\left(\frac{\beta+\gamma}{2} + \varphi\right)$ + log. sin. $(\alpha+\beta+\gamma)$ log. sin. δ.

log. sin. α . . = lg.sn.122°,24′ = 9,9265112 — lg.sn. β . . = lg.sn.301°,30′ = 9,9307658
lg.sn $\left(\frac{\beta+\gamma}{2} - \varphi\right)$ = lg.sn.139°,54′ = 9,8089692 lg.sn. $\left(\frac{\beta+\gamma}{2} + \varphi\right)$ = lg.sn.205°,42′ = 9,6371454
lg. sn. $(\beta+\gamma+\delta)$ = lg.sn.246°,40′ = 9,9627266 lg.sn. $(\alpha+\beta+\gamma)$ = lg.sn.108°,06′ = 9,9782063
log. sin. γ . . = lg.sn. 44°,06′ = 9,8425548 lg.sn. δ . . = lg.sn.261°,00′ = 9,9966199
39,5407618 39,5407404

Die Differenz beträgt nur 214 und ist sonach φ als hinlänglich genau anzunehmen. Fig. 15.

Es ist nunmehr schließlich:

$$CD = AB.\ \sin.\left(\alpha + \frac{\beta+\gamma}{2} + \varphi\right).\ \sin.\ (\beta+\gamma+\delta)$$
$$\sin.\ (\gamma+\delta)\ \sin.\ \alpha.$$

AB	= 5748
log. 5748	= 3,7595168
log. sin. . . 328°, 06′	= 9,7229943
log. sin. . . 246°, 36′	= 9,9627266
compl. log. sin. 305°, 06′	= 0,0871672
compl. log. sin. 122°, 24′	= 0,0734888
	3,6058937 = log. 4035,5.

Dem Scharfsinne des Lesers bleibt überlassen, sich für diesen Fall eine direkte Auflösungsformel aus der Figur zu entwickeln.

§. 7.

Von der Berechnung fehlender Stücke und unbekannter Entfernungen.

Obgleich es der Controle der Rechnung, überhaupt der ganzen Berechnung wegen, Regel ist und bleiben muß, wo möglich alle Seiten und alle Winkel eines Polygons zu messen, so kommen doch nicht selten Fälle vor, wo dieses nicht möglich ist, wo also unbekannte Seiten und Winkel aus den bekannten Stücken durch Rechnung gefunden werden müssen. Wir wollen hierzu in Nachstehendem für die Hauptfälle Anleitung geben.

Iter Fall. In einem Vieleck sind alle Seite weniger zwei und alle Winkel weniger einem gegeben; die fehlenden Theile sollen berechnet werden.

Der fehlende Winkel kann leicht gefunden werden, denn es ist allgemein $A + B + C + D + E + F \ldots = (n-2)\ 180°$.

Man braucht also nur die Summe aller Winkel von $(n-2)$ 180° abzuziehen, um den folgenden Winkel zu erhalten. Die fehlenden Seiten sollen aneinander liegen.

Wenn wir die eine dieser Seiten, z. B. AG, Fig. 16., als Achse annehmen, so können wir die Coordinaten bis zum Punkte Fig. 16.

Fig.16. F ohne Anſtand berechnen. Die Ordinate von F iſt FH und dieſe iſt die Ergänzung aller Ordinaten zu Null, da bekanntlich die Summe aller $\triangle y = 0$ iſt. Iſt FH bekannt, ſo hat man $FG = \frac{FH}{\text{sin. Az. F}}$ und $GH = FH.\ \text{cotg. Az. F.}$ Durch GH iſt aber auch AG gegeben, denn AH iſt gleich der Summe der vorhergehenden $\triangle x$ und alle $\triangle x$ zuſammengenommen ſind gleich der Länge der Achſe AG.

Man ſiehet, daß dieſer Fall keine Schwierigkeit hat, allein es wird derſelbe etwas complicirter, wenn die Axe bereits gegeben iſt.

Fig.17. Es ſei ſonach AM, Fig. 17., die Achſe, AB und BC die fehlenden Linien. Die Ordinaten und Abſciſſen von A und C ſind bekannt und es iſt einleuchtend, daß die fehlenden Seiten leicht berechnet werden können, wenn y und x von B bekannt ſind.

Man ſetze die Ordinate für $A = O$ und die für $C = o$. Die Abſciſſe für $A = A$ und die für $C = a$; die geſuchte Ordinate für den Punkt $B = y$; die Abſciſſe $= x$. Es ſei ferner $x - A = \triangle x$; $y - O = \triangle y$; die Neigung oder das Azimuth von $BA = \alpha$, die Neigung von $CB = \beta$. Durch B und C denke man ſich Parallelen mit der Achſe ſo weit gezogen, bis dieſelben die verlängerte Ordinate von C treffen, ſo hat man: BE oder $\triangle y = AE.\ \text{tang. } \alpha = \triangle x.\ \text{tang. } \alpha.$ und $\triangle x.\ \text{tang. } \alpha. + (a - A - \triangle x).\ \text{tang. } \beta$ *) $= o - O.$

Hieraus folgt $\triangle x = \frac{(o - O) - (a - A).\ \text{tang. } \beta.}{\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \beta.}$ Subſtituirt man für $\text{tang.} = \frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}$, ſo wird

$\triangle x = [(o - O).\ \text{cos. } \beta - (a - A).\ \text{sin. } \beta].\ \frac{\text{cos. } \alpha.}{\text{sin. } (\alpha - \beta)}$ und hierdurch wird

$\triangle y = [(o - O).\ \text{cos. } \beta. - (a - A).\ \text{sin. } \beta.]\ \frac{\text{sin. } \alpha}{\text{sin. } \alpha - \beta}$ und daraus erhält man $x = a + \triangle x$ und $y = o + \triangle y.$

*) $a - A - \triangle x = CF.\ o - O = CG.$

Hat man x und y gefunden, so lassen sich die Seiten leicht berechnen. Fig. 17.

Es seien O = o; A = o; o = — 120; a = — 1330 $< \alpha = 144°$; $\beta = 223°$, so ist

— log. . . 120°	= 2,0791812	— log. . . 1330	= 3,1238516
— log. cos. 223°	= 9,8641275	— log. sin. 223°	= 9,8337833
log. sin. 144°	= 9,7692187	log. sin. 144°	= 9,7692187
	= 1,7125274		2,7268536
log. sin. —79°	= 9,9019466	log. sin. —79°	= 9,9919466
	1,7205808		2,7349070
	= — log. 52,55		— 543,13

$\triangle y = -52{,}55 + 543{,}13$ *) $= +490{,}58 = y$;

$\triangle x$ kann entweder aus der obigen Formel oder kürzer auch so berechnet werden: $\triangle x = 490.58 \cdot \text{cotang. } 144°$.

log. . . . 490.58 = 2,6907010
log. cotang. 144° = 10,1387390

— 2,8294400 = — log. 675,2

$\triangle y$ von B nach C oder $\triangle y' = +490{,}58 + 120 = +610{,}58$

$\triangle x$ von B nach C oder $\triangle x' = -1330 + 675{,}2 = -654{,}8$

Hätte man die Rechnung bei C begonnen, so wäre jetzt $\alpha = \text{Az. C.} = \text{Az. } \beta - 180° = 43°$. $\beta = 360° - (180 - \text{Az. A}) = 180° + \text{Az. A} = 324°$.

In diesem Falle stellt sich die Rechnung folgendermaßen:

—log. . . . 120	= 2,0791812	—log. . . . 1330	= 3,1238516
log. cos. 324°	= 9,9079576	— log. sin. . . 324°	= 9,7692187
log. sin. 43°	= 9,8337833	log. sin. . . 43°	= 9,8337833
	21,8209221		22,7268536
log. sin. —281°	= 9,9919466	log. sin. — 281°	= 9,9919466
	1,8289755		2,7349070
	= — log. 67,45		= log. + 543,13

sonach $\triangle y' = -67{,}45 - 543{,}13 = -610{,}58$

und $\triangle x' = \triangle y' \cdot \text{cotang. } 43° = -654{,}8$ wie vorhin.

*) Weil — 543,13 abgezogen werden muß, so erhält diese Größe das Zeichen +.

Fig. 18. **IIter Fall. Es fehlt eine Linie und zwei anliegende Winkel.**

a) In dem Polygon ABCDEFG, Fig. 18, sei AG und die Winkel bei A und G unbekannt.

Man nehme AB zur Achse und berechne alle Coordinaten bis G. Nach den Grundgleichungen der Polygonometrie ist

$$y \text{ von } G = BC.\sin.Az.B + CD.\sin.Az.C + DE.\sin.Az.D + EF.\sin.Az.E + FG.\sin.Az.F$$

$$x \text{ von } G = AB. - (BC.\cos.AB. + CD.\cos.Az.C + DE.\cos.Az.D + EF.\cos.Az.E + FG.\cos.Az.F).$$

Es ist aber $y = GH$ und $x = AH$, sonach $\text{tang.}\ \alpha = \frac{y}{x}$ und $< A = 180 - \alpha$, also $< A$ bekannt; der Winkel bei G ergiebt sich durch die s. g. Winkelprobe, aber auch auf direkte Art, nämlich $< G = 360^0 - Az.F. + \alpha = 360^0 + \alpha - Az.F.$

$$\text{Die Linie } AG = \sqrt{y^2 + x^2} \text{ oder auch } = \frac{y}{\sin.\alpha}$$

Diese Aufgabe kommt dem Forstmann, nur unter einer anderen Form, häufig vor. Es soll nämlich eine Linie, deren Anfangs- und Endpunkte gegeben sind, durch einen Wald gehauen werden, z. B. von A nach D. Man sucht die Länge der Linie und die Winkel bei A und D.

Wenn der Wald bereits vermessen ist, so braucht man nur die Ordinaten und Abscissen bis D zu berechnen, um daraus tang. α, d. h. den Winkel DAB zu finden.

Ist die fragliche Waldung nicht vermessen, so sucht man auf den nächsten und besten Punkten von A bis D zu gelangen und mißt alle zwischenliegende Linien und Winkel, wobei es ganz gleichgültig ist, ob die Linie AD ein- oder mehrmals überschritten wird, wenn man nur bei der Winkelmessung consequent verfährt und stets zuerst Signal links, dann Signal rechts beobachtet, sonach bei C' den erhabenen Winkel mißt und in Rechnung stellt. Ein Beispiel soll diesen Fall erläutern:

Es sei Fig. 18, $AB = 420.$ $BC' = 400. = C'D = 290.$

$< B = 59^0 < C' = 264^0 < D = 121^0.$

$Az.\ B = 59^0.$

$Az.\ C' = 59^0 + 264^0 - 180^0 = 143^0.$

log. sin. 59°	= 9,9330656	log. cos. 59°	= 9,7118393	Fig. 18.
log. . . 400	= 2,6020600	log. . . 400	= 2,6020600	
	2,5351256		2,3138993	
	+ 342,8		+ 206,0	
log. . . 290	= 2,4623980	log. . . 290	= 2,4623980	
log. sin. 143°	= 9,7994630	log. cos. 143°	= 9,9023486	
	2,2618610		2,3647466	
	+ 182,8		− 231,6.	

Hiernach ist y von D = 342,8 + 182,8 = + 525,6; x von D = 420,0 − 206,0 + 231,6 = + 447,6.

$$\text{tang. DAB} = \frac{+\,525{,}6}{+\,447{,}6}$$

log. 525,6 = 2,7206554
log. 447,6 = 2,6508901

0,0797653 = log. tang. 50°, 13′ 33″.

$$\text{AD} = \frac{525{,}6}{\sin.\ 50°,\ 13',\ 33''}$$

log. . . 525,6 . . = 2,7206554
log. sin. 50°, 13′, 33″ = 9,8856845

2,8349709 = log. 683,9.

b) Liegen die fehlenden Stücke getrennt, wie in Fig. 19, wo AH die fehlende Seite, B und F die fehlenden Winkel sein mögen, so verbinden wir die Punkte B und F, nehmen BC als Achse und C als Ursprung in dem Vieleck BCDEF an und berechne $\triangle y$ und $\triangle x$ für die Punkte D, E und F. Aus y und x für F erhält man tang. $\text{CBF} = \frac{y}{x}$, welcher Winkel zugleich der Polygonalwinkel bei B mit BF ist. Fig. 19.

Der Polygonalwinkel bei F wird leicht gefunden, denn es ist Az. F = Az. E + < F − 180° und hieraus folgt F = 180° + Az. F − Az. E.; Az. F = 360° − α, sonach F = 180 + 360° − α − Az. E.

Fig. 19. Sind auf diese Art die zum oberen Polygon BCDEF gehörigen Winkel bei B und F, sowie die Linie BF gefunden, so haben wir nunmehr in dem unteren Polygon ABFGH noch die beiden Winkel bei F und B, sowie die Linie AH zu suchen.

Nehmen wir jetzt die Unbekannte AH zur Achse, so können wir sowohl y von F, als auch y von B leicht berechn. Setzen wir $BF = a$ und $< FBJ = \varphi$, so ist

$$\sin.\ \varphi = \frac{FJ}{a} = \frac{y \text{ von } F - y \text{ von } B}{a.}$$

Nunmehr ist der Polygonalwinkel bei $B = 180 - A + \varphi$ der bei $F = 180^\circ - \varphi -$ Az. G. Die Linie AH wird schließlich durch den Ausdruck gefunden:

$$AH = GH.\cos. H + GF.\cos. \text{Az. } G + AB.\cos. A + a.\cos.\ \alpha.$$

nämlich durch die Summe aller $\triangle x$ von den Punkten B, F, G.

Ein Beispiel wird das einzuhaltende Verfahren verständlich machen.

Es sei $AB = 790$, $BC = 830$, $CD = 640$, $DE = 490$,
$EF = 520$, $FG = 540$, $GH = 610$.
Ferner $A = 135^\circ$, $C = 168^\circ$, $D = 154^\circ$, $E = 156^\circ$, $G = 92^\circ$,
$H = 132^\circ$.
$< C =$ Az. C. $= 168^\circ$.

Az. $D =$ Az. $C + D - 180 = 168^\circ + 154^\circ - 180^\circ = 142^\circ$.
Az. $E =$ Az. $D + E - 180 = 142^\circ + 156^\circ - 180^\circ = 118^\circ$.

log. . . 640	= 2,8061800	log. . . 640	= 2,8061800
log. sin. 168°	= 9,3178789	log. cos. 168°	= 9,9904044
	2,1240589		2,7965844
	+ 133,1		— 626,0.
log. . . 490	= 2,6901961	log. . . 490	= 2,6901961
log. sin. 142°	= 9,7893420	log. sin. 142°	= 9,8865321
	2,4795381		2,5867282
	+ 301,7		— 386,1.

log. . . 520 = 2,7160033 log. . . 520 = 2,7160033 Fig. 19.
log. sin. 118° = 9,9459349 log. cos. 118° = 9,6716093

2,6619382 2,3876126
+ 459,1 − 244,1.

Wir erhalten ſonach

y von F = 133,1 + 301,7 + 459,1 = 893,9
x von F = 830,0 + 626,0 + 386,1 + 244,1 = 2086,2

$$\text{tang. } \alpha = \frac{893,9}{2086,2}$$

log. 893,9 = 2,9512889
log. 2086,2 = 3,3193559

9,6319330 = log. tang. 23°, 12′ = B′

F = 360 + 180 − Äz. E − α = 540° − 141°, 12′ = 398°, 48′
= 38°, 48′.

$$BF = \frac{893,9}{\sin. 23°, 12'}.$$

log. sin. 23°, 12′ = 9,5854322
log. . . . 8938 = 2,9512779

3,3558567 =
log. 2269,1.

Im unteren Polygon iſt

log. . . 790 = 2,8976271 log. . . 790 = 2,8976271
log. sin. 135° = 9,8494850 log. cos. 135° = 9,8494850

2,7471121 2,7471121
y von B = + 558,6 x von B = − 558,6

log. . . 610 = 2,7853298 log. . . 610 = 2,7853298
log. sin. 132° = 9,8710735 log. cos. 132° = 9,8255109

2,6564033 2,6108407
+ 453,3 − 408,2
log. . . 540 = 2,7323938 log. . . 540 = 2,7323938
log. sin. 44° = 9,8417713 log. cos. 44° = 9,8569341

2,5741651 2,5893279
+ 375,1 + 388,4.

Fig. 19.

y von F = 828,4 x von F = — 19,8
y von B = 558,6

Diff. = 269,8

$\sin. \varphi = \frac{269,8}{2269,1}$ log. 269,8 = 2,4310419
log. 2269,1 = 3,3558536

9,0751883
= log. sin. 6°, 50'.

Polygonalwinkel bei F = 180° — 44° — 6°, 50' = 129°, 10'
„ „ B = φ + 180 — A = 51°, 50'

log. cos. 6°, 50' = 9,9967507
log. . . . 2269,1 = 3,3558567

3,3526074
+ 2252,2

AH = + 2252,2 — 558,6 — 19,8 = 1673,8.

Fig. 20. IIIter Fall. Es fehlen zwei Linien, welche in der Figur getrennt liegen *).

Man verbinde die Endpunkte der beiden fehlenden Linien und berechne die Diagonalen und deren anliegende Winkel nach dem unter II. 1. erläuterten Verfahren. Man erhält hierdurch ein Viereck, worin zwei gegenüberstehende Seiten und alle Winkel bekannt sind; zwei gegenüberstehende Seiten fehlen.

Es seien in dem Viereck ABCD, Fig. 20., AB und CD die aus den anschließenden Figurentheilen berechneten Diagonalen BC und AD die unbekannten Linien. Um diese zu finden, fälle man auf die eine derselben, z. B. AD Perpendikel von B und C und berechne y und x von B und C. Nachdem dieses geschehen, nehme man die Differenz der beiden y, in unserer Figur = CE, so ist

$$BC = \frac{CE}{\sin. CBE} = \frac{\triangle y}{\sin. Az. B} \text{ und } BE = BC. \cos. Az. B.$$

*) Dieser Fall gehört strenge genommen zu I., allein dort konnte er noch nicht gelöst werden.

Durch AF, FG = BE und DG ist AD gefunden, nämlich AD = AF. cos. A + BC. cos. Az. B + CD. cos. D. Der Fall ist zu einfach, als daß nöthig wäre, denselben durch ein Beispiel zu erläutern. Fig. 20.

Wenn keine bestimmte Achse vorgeschrieben, es sonach gestattet ist, sich eine beliebige Achse zu wählen, so kann die vorliegende Aufgabe auch auf folgende Art gelöst werden.

In Fig. 21. mögen die Linien AH und DE und ein beliebiger Winkel fehlen. Der letztere wird durch die geometrische Winkelprobe gefunden. Fig. 21.

Man nehme die eine der fehlenden Linien, z. B. AH zur Achse, so ist nach dem Hauptsatz der Polygonometrie die Summe aller $\triangle y = 0$, also:

AB. sin. Az. A + BC. sin. Az. B + CD. sin. Az. C + x. sin. Az. D +
+ FE. sin. Az. E + FG. sin. Az. F + GH. sin. Az. G = 0

folglich x = — (AB. sin. Az. A + BC. sin. Az. β + CD. sin. Az. C +
+ FE. sin. Az. E + FG. sin. Az. F + GH. sin. Az. G) : Az. D.

Ist auf diese Art x gefunden, so wird AH = der Summe aller $\triangle x$ = AB. cos. Az. A + BC. cos. Az. β + CD. cos. Az. C + DE. cos. Az. D + EF. cos. Az. E + FG. cos. Az. F + GH. cos. Az. G.

Auch dieser Fall ist zu einfach, als daß nöthig wäre, denselben durch ein besonderes Beispiel zu erläutern.

IVter Fall. In einem Polygon sind drei Winkel unbekannt. Es sollen diese, und die Coordinaten dieser Punkte, durch Rechnung bestimmt werden.

Es ist zu unterscheiden:

a) ob die fehlenden drei Winkel auf einander folgen, oder

b) ob dieselben in der Figur zerstreut liegen.

Im ersteren Falle mögen die Winkel F, G und H in Fig. 21. fehlen.

Man berechne vom Punkte A aus die Coordinaten bis zum Punkt F und verbinde diesen mit dem Punkte H durch eine gerade Linie. Die Ordinate von F ist die Ergänzung der Summe aller $\triangle y$ von A aus zu Null; die Abscisse von F ist die Ergänzung aller $\triangle x$ zur Achse AH.

Fig 21. Es läßt ſich ſonach die Linie FH und die an derſelben liegenden Winkel leicht berechnen. Man hat nunmehr das Dreieck FGH, worin die drei Seiten bekannt ſind, aus welchen die Winkel leicht zu finden ſind, denn es iſt sin. $\frac{1}{2}G = \sqrt{\frac{(p-FG)(p-GH)}{FG.GH}}$

wo p = der halben Summe der drei Seiten.

Fig.22. Im anderen Falle verbinde man die Punkte wo die Winkel fehlen, z. B. A, D und G, Fig. 22., durch drei gerade Linien und berechne vorerſt dieſe als Diagonalen, ſowie die Winkel, welche ſie mit den anſtoßenden Seiten des Vielecks machen. Nachdem dieſes geſchehen, hat man in dem Dreieck ADG die drei Seiten, woraus ſich die Winkel berechnen laſſen.

Die etwas weitläufige Rechnung ſtellt ſich folgendermaßen AB = 61, BC = 87, CD = 63, DE = 47, EF = 53, FG = 57, GH = 42, JH = 45, JA = 83 und die Winkel B = 141° C = 132°, E = 146°, F = 163°, H = 138°, J = 137°.

1) Es iſt tang. $BAD = \frac{BC.\sin.\text{Az. }B + CD.\sin.\text{Az. }C}{AB - BC.\cos.\text{Az. }B - CD.\cos.\text{Az. }C}$

log. . . . 87	= 1,9395193	log. . . . 87	= 1,9395193
log. sin. 141°	= 9,7988718	log. cos. 141°	= 9,8905026
	1,7383911		1,8300219
	+ 54,8		− 67,6
log. . . 63	= 1,7993405	log. . . 63	= 1,7993405
log. sin. 93°	= 9,9994044	log. cos. 93°	= 8,7188002
	1,7987449		0,5181407
	+ 62,9		− 3,3.

$$\frac{54{,}8 + 72{,}9}{61 + 67{,}6 + 3{,}3} = \frac{117{,}7}{131{,}9}$$

log. 117,7 = 2,0707765
log. 131,9 = 2,1202448

9,9505317 = log. tang. 41°, 45′

Az. D = 360° − 41°, 45′ = 318°, 15′ Fig.22.

folglich Polygonalwinkel D = Az. D + 180° − Az. C = 318°, 15′
+ 180° − 93° = 405°, 15′ = 45°, 15′.

$$AD = \frac{117{,}7}{\sin. 41°, 45'}$$

log. . . 117,7 = 2,0707765
log. sin. 41°, 45′ = 9,7233971
2,2473794 = log. 176,7.

2) Es ist $\text{tang. } EDG = \frac{EF. \sin. E + FG. \sin. Az. F}{DE - EF. \cos. E - FG. \cos. Az. F.}$

log. . . 53	= 1,7242759	log. . . 53	= 1,7242759
log. sin. 146°	= 9,7475617	log. cos. 146°	= 9,9185742
	1,4718376		1,6428501
	+ 29,6		− 43,9
log. . . 57	= 1,7558749	log. . . 57	= 1,7558749
log. sin. 129°	= 9,8905026	log. cos. 129°	= 9,7988718
	1,6463775		1,5547467
	+ 44,3		− 35,9

$$\text{tang. } EDG = \frac{+29{,}6 + 44{,}3}{47 + 43{,}9 + 35{,}9} = \frac{73{,}9}{126{,}8}$$

log. 73,9 = 1,8686444
log. 126,8 = 2,1031193
9,7655251 = log. tang. 30°, 14′

Az. G = 360° − 30°, 14′ = 329,46°
Polyg. G = Az. G − 180° − Az. F. = 329°, 46′ − 180° − 129° = 20°, 46′ und

$$DG = \frac{73{,}9}{\sin. 30°, 14'} = 146{,}8.$$

3) Es ist $\text{tang } HGA = \frac{HJ. \sin. H + JA. \sin. Az. J}{GH - HJ. \cos. A - JA. \cos. Az. J.}$

log. . . 45	= 1,6532125	log. . . 45	= 1,6532125
log. sin. 138°	= 9,8255109	log. cos. 138°	= 9,8710735
	1,4787234		1,5242860
	+ 30,1		− 33,4

Fig. 22.

$$\begin{array}{lll} \log. \ldots 83 = 1{,}9190781 & \log. \ldots 83 = 1{,}9190781 \\ \log. \sin. 95^\circ = 9{,}9983442 & \log. \cos. 95^\circ = 8{,}9402960 \\ \hline 1{,}9174223 & 0{,}8593741 \\ +\ 82{,}7 & -\ 7{,}2 \end{array}$$

$$\text{tang. AGH} = \frac{112{,}8}{42 + 33{,}4 + 7{,}2} = \frac{112{,}8}{82{,}6}$$

$$\begin{array}{l} \log. 112{,}8 = 2{,}0523091 \\ \log. 82{,}6 = 1{,}9169800 \\ \hline 10{,}1353291 = \log. \text{tang. } 53^\circ, 47' \end{array}$$

$$\text{Az. A} = 360^\circ - 53^\circ, 47' = 306^\circ, 13'$$

$$\text{Polyg. W. A} = \text{Az. A} - 180^\circ - \text{Az. J} =$$
$$= 306^\circ, 13' - 180^\circ - 95^\circ = 31^\circ, 13'.$$

$$\text{AG} = \frac{112{,}8}{\sin. 53^0\ 47'} \quad \begin{array}{l} \log. \ldots 112{,}8 = 2{,}0523091 \\ \log. \sin. 53^0\ 47' = 9{,}9067597 \\ \hline 2{,}1455494 = \\ \log. 139{,}8. \end{array}$$

Wir kennen jetzt in dem Dreieck ADG die drei Seiten, nämlich AD = 176,7, DG = 146,8 und AG = 139,8 und erhalten sonach den halben Umfang oder

$$p = \frac{176{,}7 + 146{,}8 + 139{,}8}{2} = 231{,}65 \text{ daher}$$

$$p = \text{AD} = 231{,}65 - 176{,}7 = 54{,}95$$
$$p - \text{DG} = 231{,}65 - 146{,}8 = 84{,}95$$
$$p - \text{AG} = 231{,}65 - 139{,}8 = 91{,}85 \text{ folglich}$$

$$\sin. \tfrac{1}{2}\text{DAG} = \sqrt{\frac{54{,}95 \,.\, 91{,}85}{176{,}7 \,.\, 139{,}8}}$$

$$\sin. \tfrac{1}{2}\text{GDA} = \sqrt{\frac{54{,}95 \,.\, 84{,}05}{176{,}7 \,.\, 146{,}7}}$$

$$\sin. \tfrac{1}{2}\text{AGD} = \sqrt{\frac{84{,}95 \,.\, 91{,}85}{146{,}7 \,.\, 139{,}8}}$$

log. . . . . 54,95 = 1,7399677 Fig. 22.
log. . . . . 91,85 = 1,9630792
log. compt. 176,7 = 7,7527635
log. compt. 139,8 = 7,8544928

19,3103032 : 2
9,6551516 =
log. sin. 26° 52′ folgl. DAG = 53° 44′

log. . . . . 54,95 = 1,7399677
log. . . . . 84,95 = 1,9291634
log. compl. 176,7 = 7,7527635
log. compl. 146,7 = 7,8335699

19,2554645 : 2
9,6277322
= log. sin. 25° 06′ folgl. ADG = 50° 12′.

log. . . . . 84,95 = 1,9291634
log. . . . . 91,85 = 1,9630792
log. compl. 146,7 = 7,8335699
log. compl. 139,8 = 7,8544928

19,5803053 : 2
9,7901526
= log. sin. 38° 05′ folgl. AGD = 76° 10′

Die drei Winkel zusammen, enthalten

53° 44′ + 50° 12′ + 76° 10′ = 180° 06′.

Die Abweichung von 06′ liegt in den Decimalstellen der Linien.

Es ergeben sich nunmehr die Polygonalwinkel

A = 41°, 45′ + 53°, 44′ + 31°, 13′ = 126°, 42′.
D = 30°, 14′ + 50°, 12′ + 45°, 15′ = 125°, 41′.
G = 53°, 47′ + 76°, 10′ + 20°, 46′ = 150°, 43′.

§. 8.

Auffinden von Fehlern in den Coordinaten in Folge fehlerhafter Messung.

Alle kleinere und größere Fehler, welche bei dem Messen der Linien und Winkel begangen werden, treten bei der Berechnung

Fig.22. der Coordinaten zu Tage, wenn sich nicht einzelne Fehler in ihrer Wirkung auf den Schluß der Figur gegenseitig aufgehoben haben sollten.

Wir wollen hier nicht von dem Auffinden kleinerer Fehler und deren Berichtigung handeln *) vielmehr nur Anleitung geben, zur Auffindung und Correctur einzelner größerer Fehler, welche entweder bei der Linienmessung oder bei der Winkelmessung begangen worden sind.

I. Wir wollen den ersten Fall betrachten, wo nämlich bei Messung einer der Umfangslinien gefehlt worden und die Größe des Fehlers bestimmen.

Fig.23. Betrachten wir die Fig. 23., so ersehen wir, daß und wie ein Fehler bei Messung der Linie BC begangen, sich fortpflanzt und am Schlußpunkt E darstellt. Wurde die Linie um den Betrag CC'' zu groß gemessen, so fällt der Punkt E'' über die Achse und jenseits deren Endpunktes E. Wurde sie zu klein gemessen, so fällt der Endpunkt E' unter die Achse. Im ersteren Falle ist der Fehler in den Ordinaten und Abscissen positiv, im letzteren Falle ist er negativ.

Weil die Linien C' D' und C'' D'' wegen richtiger Winkelmessung mit CD parallel laufen und mit dieser gleiche Länge haben, so ist auch D' D'' parallel mit C' C'' und aus gleichen Gründen ist auch E' E'' parallel mit D' D'' und sonach auch mit C' C'' und es ist der Neigungswinkel von E'' gleich dem Neigungswinkel von C nach C'', gleich dem Neigungswinkel der Linie BC. Der Neigungswinkel von E' ist gleich dem Neigungswinkel von E''$+180^{\circ}$ weil dieser unterhalb die Achse fällt.

Um also die Linie zu bestimmen, worin der Fehler begangen worden, braucht man nur den Fehler in der Ordinate durch den

*) Wer sich gründliche Kenntnisse über den Einfluß kleinerer und größerer Fehler und deren möglichste und consequenteste Beseitigung verschaffen will, dem ist das Handbuch für Geometer von Jos. Fr. Schiereck. Köln 1827, sehr zu empfehlen.

in der Abſciſſe zu dividiren und den Quotienten als Tangente des Fig.23.
Neigungswinkels aufzuſchlagen und in dem Verzeichniß der Azimuthe nachzuſehen, welche Linie dieſe Neigung hat. Findet ſich kein Azimuth der Art vor, ſo addirt man zur aufgeſchlagenen Tangente 180° und ſiehet zu, ob ſich nunmehr ein ſolcher Winkel unter den Azimuthen vorfindet.

Die Größe des begangenen Fehlers, nämlich EE'' oder EE' ergiebt ſich durch den Ausdruck $= \frac{\text{Fehler in y}}{\text{sin. des Neigungswinkels.}}$

Sollten zwei Seiten der Figur, worin bei einer der Fehler begangen worden, mit einander parallel laufen, ſonach gleichen Neigungswinkel haben, ſo bleibt ungewiß, bei welcher von beiden Linien der Fehler begangen worden iſt.

Geſetzt es hätte ſich bei der Zuſammenſtellung der Differenzen von y und x ein Fehler in den y zu — 7,29 und in den x zu — 6,84 ergeben, ſo erhält man log. 7,29 = 0,8627275

log. 6,84 = 0,8350561

0,9276714 =

log. tang. 46°, 49', 30'', weil aber ſowohl die Ordinate, als die Abſciſſe negativ iſt, ſo gehört hierzu der Winkel 226°, 49' 30'', welcher ſich bei den Neigungswinkeln vorfinden wird.

Die Größe des Fehlers wird erhalten:

log. . . 7,29 . . . . . = 0,8627275

log. sin. 226°, 49', 30'' = 9,8628867

0,9998408 = log. 9,996

und wäre ſonach die betreffende Linie um 10,00 zu groß angegeben worden.

II. Die Auffindung eines bedeutenderen Fehlers in den Winkeln, in Folge deſſen die Figur nicht zum Schluſſe kommt, iſt nicht ſo einfach, als die Auffindung eines Linienmeſſungsfehlers, und läßt ſich folgendermaßen bezwecken.

In Fig. 24. ſei bei dem Punkte C ein bedeutender Winkel- Fig.24.
fehler vorgefallen, in Folge deſſen der wahre Schlußpunkt G nach

Fig. 24. G' fällt und die Ordinaten und Abscissen eine bedeutende Abweichung ergeben.

Weil nur im Winkel C gefehlt ist, so muß der durch die Linie GC geschlossene Theil CDEFG des Polygons dem in Folge des Winkelfehlers entstandene Theile C' D' E' F' G' völlig gleich sein. Es ist sonach CG = CG' und das Dreieck CGG' ist gleichschenkelicht. Wenn man also aus der Mitte von GG' ein Perpendikel errichtet, so muß dieses den Punkt C, bei welchem der Fehler begangen worden, treffen, und hierdurch erhalten wir den Schlüssel zur Auflösung unserer Aufgabe.

Man setze den Fehler in den Ordinaten = a
den in den Abscissen . . . . . = b
den im Winkel C = 2α
den Neigungswinkel von GG' = tang. $\frac{a}{b} = \beta$
GH = $\frac{1}{2}$ GG' = m, CH = x; HJ = y.

Es ist

$$x = \frac{m}{\text{tang. } \alpha}; \quad y = m.\text{tang. } \beta; \quad x + y = \frac{m}{\text{tang. } \alpha} + m.\text{tang. } \beta =$$

$$m\left(\frac{1}{\text{tang. } \alpha} + \text{tang. } \beta\right) = m\left(\frac{1 + \text{tang. } \alpha \text{ tang. } \beta}{\text{tang. } \alpha.}\right).$$

$$y \text{ von } C = (x - y) \cos. \beta = m\left(\frac{1 - \text{tang. } \alpha. \text{ tang. } \beta}{\text{tang. } \alpha.}\right)\cos. \beta.$$

Setzt man hierin für tang. $= \frac{\sin.}{\cos.}$, so ist

$$y \text{ von } C = m\left(\frac{\cos. \alpha. \cos. \beta - \sin. \alpha. \sin. \beta}{\sin. \alpha.}\right) = m\,\frac{\cos.(\alpha + \beta)}{\sin. \alpha.}$$

$$x \text{ von } C = (x - y) \sin. \beta + GJ = (x - y) \sin. \beta + \frac{m}{\cos. \beta} =$$

$$= \frac{m}{\cos. \beta} \cdot \left(\frac{\cos.(\alpha + \beta) \sin. \beta + \sin. \alpha}{\sin. \alpha.}\right).$$

Da $m = \frac{a}{2.\sin. \beta}$, so wird schließlich:

Fig. 24.

$$y \text{ von } C = \frac{a.\cos.(\alpha+\beta)}{2.\sin.\alpha.\sin.\beta} \text{ und}$$

$$x \text{ von } C = \frac{a}{2.\sin.\beta.\cos.\beta.}\left[\frac{\cos.(\alpha+\beta).\sin.\beta.+\sin.\alpha}{\sin.\alpha}\right] =$$

$$= \frac{a}{\sin.2\beta}\left[\frac{\cos.(\alpha+\beta).\sin.\beta.+\sin.\alpha}{\sin.\alpha}\right].$$

Es sei die Summe der Winkel um $20° = 2\alpha$ zu klein und die Berechnung der Coordinaten giebt für die Ordinaten den Unterschied von $-5{,}47 = a$; für die Abscissen den Unterschied $+4{,}74, = b$, dadurch ist

log. 5,47 = 0,7379873
log. 4,74 = 0,6757783
0,0692090 = log. tang. 48° 5′ 22″

Da y negativ, x positiv ist, so liegt der Winkel im IV. Quadranten und ist $= 360° - 48°, 5' 22'', = 311°, 54', 38''$.

Die Ordinate des gesuchten Punktes ist daher

$$= -\frac{5{,}47.\cos.321°, 55', 38''}{2.\sin.10°.\sin.311°, 54', 38''}$$

log. . . . . 5,47 . . . . = 0,7379873
log. cos. . . 321°, 54′, 38″ = 9,8960016
compl. log. sin. 2 . . . . . = 9,6989700
compl. log. sin. 10° . . . . = 0,7603298
compl. log. sin. 311°, 54′, 38″ = 0,1283170
1,2216057 = log. + 16,66.

Bei demjenigen Punkte, wo die Ordinate $= +16{,}66$ beträgt, ist der Fehler im Winkel vorgefallen. Wäre der fehlerhaft gemessene Winkel zu groß angegeben, so würde y jenseits GG′ fallen und in diesem Falle die Formel sich blos in cos. $(\beta - \alpha)$ abändern, wie man leicht finden wird, wenn man sich die Formel für diesen Fall entwickelt.

Wenn zwei Ordinaten in dem Vieleck gleich wären und es träfe sich, daß der Fehler bei einem dieser Punkte begangen worden, dann berechne man die Abscisse dieses Punktes, bei welchem der Fehler statt hatte nach der Formel:

Fig. 24.

$$x = \frac{a}{\sin. 2\beta}\left[\frac{\cos.(\alpha+\beta)\sin.\beta + \sin.\alpha}{\sin.\alpha}\right] \text{ oder}$$

$$x = \frac{a}{\sin. 2\beta}\left[\frac{\cos.(\beta-\alpha)\sin.\beta - \sin.\alpha}{\sin.\alpha}\right] \text{ je nachdem der}$$

fehlerhaft gemessene Winkel zu klein oder zu groß angegeben ist.

§. 9.

Messung der äußeren Parzellen.

Fig. 25. Wir haben bisher nur von den Grundfiguren oder Hülfsvielecken mit möglichst wenig und langen Linien gehandelt. Diese Hülfsvielecke entfernen sich alle mehr oder weniger von der Waldgrenze, welche meist gebrochen ist und durch kurze Linien gebildet wird. Zur richtigen Messung und Berechnung dieser äußeren Parzellen soll dieser §. Anleitung geben.

Es muß vor allem bemerkt werden, daß es sehr gut ist, wenn die Stand- oder Stationspunkte wo möglich bei Grenzzeichen genommen werden, indem hierdurch die ganze Messung schon mehr Sicherheit gewinnt und die spätere Anfertigung des Grenz-Vermessungs Registers, worauf keine Behörde Verzicht leisten wird, sehr erleichtert ist. Ohne Ausnahme läßt sich diese Regel namentlich im Gebirge, wo sich oft an einer Stelle mehrere Thäler kreuzen nicht befolgen und deßhalb muß man dem Geometer Abweichungen gestatten, wenn das Lokal diese nöthig macht. Es muß fernerhin Regel sein, sich mit den Hauptlinien nicht zu weit von der Waldgrenze zu entfernen, damit diese mittelst der Kreuzscheibe aufgenommen werden kann, ohne zu lange Perpendikel abstecken und messen zu müssen. Es fragt sich nun hier, wie lange die von den Hauptlinien aus abzusteckenden Senkrechten sein dürfen, ohne daß dadurch die Richtigkeit der Parzellenmessung gefährdet wird. Bei den jetzigen guten Instrumenten, wozu wir auch die Kreuzscheibe rechnen, kann man sich ein gutes Absehen vorausgesetzt, noch auf Perpendikel von 25° Länge verlassen und diese würden wir als nie zu überschreitendes Maximum empfehlen, indem sich der Geo-

meter auf andere Art helfen muß, wenn er sich weiter von der Waldgrenze entfernt *). Fig. 25.

Wir verweisen nun zur Verdeutlichung des Verfahrens sowohl, als über die Art der Führung des Meßbuches oder der Brouillons auf Fig. 25. und bemerken hierzu nur noch, daß der Geometer immer von der Linken nach der Rechten arbeitet und stets in das zu vermessende Grundstück hinsiehet. Die Zahlen werden am besten in Zollen, ohne Unterscheidung von Ruthen und Fußen, aufgeschrieben und die Brouillons stets auf gutes starkes Papier deutlich und reinlich angefertigt.

Von St. I. nach St. II. ist nur zu bemerken, daß bei der Berechnung alle Parzellen, mit Ausnahme einer einzigen, bei dem Stein 58 negativ werden. Da wir die Stellen, wo die Grenzlinien die Stationslinie überschreiten nicht kennen, so kann auch das positive Dreieck nicht für sich berechnet werden. Es geschiehet dieses in Verbindung mit den angrenzenden Parcellen auf folgende Art:

	No. 2. +		No. 3. —	
=	+ 1100	125	+ 1615	252
	— 850	1260	— 1110	1120
	250		505	
	2		2	

Bei Stat. II. liegt eine Wiesenfläche buchtig im Walde, welche zweckmäßig mittelst zwei Dreiecken vermessen wird, indem dadurch zwei Linien am Hülfsvieleck gespart werden. Die beiden Dreiecke kann man aus den drei Seiten berechnen, vorausgesetzt, daß die Linie von A nach St. III. gemessen wird; zweckmäßiger und wegen des Auftragens mittelst Ordinaten und Abscissen wird man aber hier verfahren, wenn man auf den Stationen II. u. III., wo man ohnedies die Polygonalwinkel messen muß, bei St. II. auch den Winkel nach A, nämlich den Winkel I. II. A. und bei St. III. den

*) Bei Aufnahme von Versuchsflächen über Holzmassengehalt, haben wir häufig Rechtecke, deren Seiten zwischen 20 und 30° lang waren bis auf wenige Zoll Genauigkeit abgesteckt.

Fig.25. Winkel nach B, nämlich den Winkel II. III. B. mißt. Mehr als diese beiden Winkel sind zur Berechnung und Zeichnung der Figur nicht nöthig, man braucht also den Theodolithen nicht nach A und B zu schleppen; auch nicht die Linie von A nach St. III. zu messen.

Ziehen Wiesengründe tief in den Wald hinein oder ganz durch denselben hindurch, wie im Gebirge öfters vorkömmt, so thut man meist besser, längs des Randes der Wiesen zu operiren, als mitten durch dieselben die Haupthülfslinien abzustecken, weil im letzteren Falle die Perpendikel meist zu lange werden, auch öfters Bäche überschrttten, nicht selten in diesen Perpendikel abgesteckt werden müssen, was selbstredend öfters schwierig und meist unangenehm ist.

Fig.26. Die Fig. 26. ist bestimmt dieses deutlicher zu machen.

Zwischen dem Hülfsvieleck VIII. und dem Hülfsvieleck IX. ziehet ein ziemlich breites Wiesenthal hindurch, worin zwar lange Linien genommen werden könnten, wenn nur die Perpendikel nicht zu lange würden. Da auch mit einzuschiebenden Dreiecken, der ziemlich gleichen Breite des Wiesengrundes halber nicht viel auszurichten ist, so thut man in diesem Falle besser, die Waldgrenze möglichst nahe anzuhalten, was besonders auch dann noch zu empfehlen ist, wenn von der Waldgrenze noch Bestands oder Bodenwechsel ablaufen sollten, wie bei St. XI. angedeutet ist, und den Wiesengrund als ein Polygon für sich zu behandeln. Es kann dieses bei jedem beliebigen Punkte geschlossen werden und dann ist nur nöthig, die Linien und Winkel von St. X. nach St. VIII. und von St. III. nach XIII. zu messen. Wäre es nicht der Sicherheit und Controle der ganzen Vermessung wegen räthlich, stets mehr Linien und Winkel zu messen, als zur Bestimmung der Figur eigentlich nöthig sind, so hätte man die Messung der durch den Wiesengrund ziehenden angegebenen Linien unterlassen können, denn da die Ordinaten und Abscissen von allen Polygonpunkten berechnet werden, so kann man stets von jedem beliebigen Punkte diesseits auf jeden beliebigen Punkt jenseits des Grundes übergehen und diesen berechnen, allein durch die Verbindung der Polygone VIII. IX. durch die beiden Linien VII. nach X. und III. nach XIII., so-

wie durch die anliegenden Winkel erhält man ein Wieſenvieleck von Fig.26.
9 Seiten und eine Controle für die Route von X — XIII. am Polygon VIII. und von III. bis VII. am Polygon IX., was zur leichteren Auffindung eines etwa vorgefallenen Meſſungsfehlers von ſehr großem Vortheil iſt.

Ueberhaupt iſt dem Geometer nicht genug anzurathen und zur Pflicht zu machen, möglich viele Controlmeſſungen vorzunehmen, was ſelten mit großem Zeitaufwande verbunden iſt.

Statt eines beſonderen Wieſenpolygons hätte man ſich auch eine Reihe von Dreiecken, etwa in der durch die punktirten Linien angedeuteten Art bilden und in jedem Dreieck die drei Winkel meſſen können, wodurch man eine ſehr ſchöne Controle für jede einzelne Polygonſeite und für die Polygonwinkel erhalten hätte, allein dieſes Verfahren, bei langen Polygonſeiten ſonſt ſehr empfehlenswerth, würde im vorliegenden Falle doch zu zeitraubend ſein, indem 20 Winkel zu meſſen und 14 Dreieckſeiten zu berechnen ſind, um die Controle für jede einzelne Polygonſeite und für jeden einzelnen Polygonwinkel zu erhalten. Weil nun auch in Wieſengründen die Linien, des meiſt nicht ſehr abhängenden Terrains und des feſten Bodens wegen, viel ſicherer zu meſſen ſind, als an ſteilen Bergabhängen, und weil ſich auch die Signale im Waldſchatten bei gleichem Lichte beſſer pointiren laſſen, als da, wo Licht und Schatten ſtark wechſeln, ſo ſind hier Meſſungsfehler weit weniger zu befürchten, als in anderen ungünſtigern Lokalitäten, und deßhalb kann man ſich auch mit einer routenweiſen Controle, ſonach mit Polygonen von 12 — 20 Seiten, wohl begnügen und ſonach das kürzere Verfahren wählen.

In manchen Fällen wird man auch das Verfahren des ſ. g. Vorwärtsabſchneidens mit Vortheil anwenden können, namentlich dann, wenn man die nicht zu nahe ſtehenden Grenzſteine von dem Anfangs- und Endpunkte einer Stationslinie gut ſehen kann. Man denke ſich die Linie AB als Standlinie, die ganze Figur Fig.27.
ABCDEF als eine in den Wald ziehende Buchte, aus Feld oder Wieſen beſtehend, oder auch die ganze Figur als einen Teich

Fig. 27. oder See, welcher vom Umfange aus, des ſumpfigen Bodens wegen, nicht zugänglich iſt, und es ſeien außer AB die Winkel an deren Anfangs- und Endpunkten gemeſſen, man ſoll die Seiten — Grenzlinien —, Winkel am Umfange — Grenzwinkel —, und den Inhalt der Figur — hier ein Sechseck — berechnen.

In jedem der Dreiecke ACB, ADB, AEB, AFB kennt man eine Seite AB und die ihr anliegenden Winkel, mithin können die Seiten der Dreiecke berechnet werden. Die Winkel bei D, E und F muß man aus zwei Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel finden. Der Inhalt des Polygons iſt den vier Dreiecken ABC, ACD, ADE und AEF zuſammengenommen gleich. Indeſſen läßt ſich der Inhalt auch aus den Dreiecken AFB, FEB, EDB und CDB berechnen, in welch letzterem Falle das letzt bezeichnete Dreieck negativ wird.

Um den noch nicht ſehr geübten Geometer mit dem ganzen Verfahren vertraut zu machen, wollen wir ein aus Pfeiderer's Trigonometrie entnommenes Beiſpiel ſpeciell durchführen:

Es ſei $AB = 320'$

$\sphericalangle BAF = 90°, 50'$ $\quad FBA = 25°, 30'$
$\sphericalangle BAE = 73°, 50'$ $\quad EBA = 50°, 15'$
$\sphericalangle BAD = 32°, 20'$ $\quad DBA = 93°, 30'$
$\sphericalangle BAC = 22°, 40'$ $\quad CBA = 54°, 36'$

$\triangle ABC.$

log. AB	= 2,5051500	$C = 102°, 44'$
log. sin. C	= 9,9891856	
Diff.	= 2,5159644	
log. sin. A	= 9,5858771	$A = 22°, 40'$
log. sin. B	= 9,9112256 *)	$B = 54°, 36'$
log. BC	= 2,1018415	$BC = 126,427$
log. AC	= 2,4271900	$AC = 267,418$

*) Um die Zahl Diff. = 2,5159644 nicht zweimal ſchreiben zu müſſen und um an Raum zu ſparen, wurden die log. sin. A und log. sin. B unter-

Fig. 27.

△ ABD.

log. AB =	2,5051500	
log. sin. D =	9,9088727	D = 54°, 10′
	2,5962773	
log. sin. A =	9,7282271	A = 32°, 20′
log. sin. B =	9,9991892	B = 93°, 30′
log. BD =	2,3245044	BD = 211,108
log. AD =	2,5954665	AD = 393,973

△ ABE.

log. AB =	2,5051500	E = 55°, 55′
log. sin. E =	9,9181475	A = 73°, 50′
	2,5870025	B = 50°, 15′
log. sin. A =	9,9824774	
log. sin. B =	9,8858370	
log. BE =	2,5694799	BE = 371,090
log. AE =	2,4728395	AE = 297,057.

△ ABF.

log. AB =	2,5051500	
log. sin. F =	9,9524188	
	2,5527312	F = 63°, 40′
log. sin. A =	9,9999541	A = 90°, 50′
log. sin. B =	9,6339844	B = 25°, 30′
log. BF =	2,5526853	BF = 357,014
log. AF =	2,1867156	AF = 153,715.

einander geſchrieben und einzeln, zu der darüber ſtehenden Differenz addirt. Die Summen ſind ebenfalls untereinander geſchrieben.

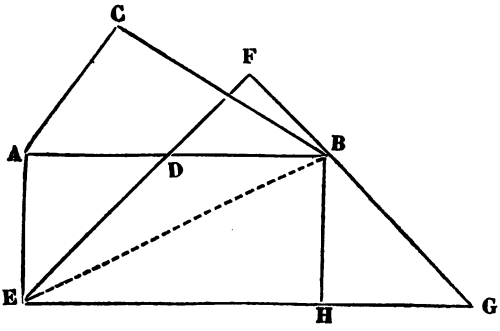
Fig. 27.

$\triangle$ CAD.

log. AD	= 2,5954665 *)	BAD	= 32°, 20′
log. AC	= 2,4271901	BAC	= 22°, 40′
log. tang. φ . .	=10,1682764	CAD	= 9°, 40′
log. tang. (φ—45)	= 9,2818225		180°, 00′
log. tang. $\frac{C+D}{2}$	=11,0728440	C + D	=170°, 20′
log. tang. $\frac{C-D}{2}$	=10,3546665	$\frac{C+D}{2}$	= 85°, 10′,
		φ . . .	= 55°, 49′, 57″

*) Dieser und alle folgenden Logarithmen der Linien sind bereits aufgeschlagen. Um die folgende Rechnung zu verstehen, müssen wir noch folgenden Hülfssatz beweisen:

Statt des Satzes: $a + b : a - b = \text{tang.} \frac{A+B}{2} : \text{tang}\left(\frac{A-B}{2}\right)$ kann man da die Logarithmen von a und b durch die vorhergehende Rechnung bereits gegeben sind, folgendes bequemere Verfahren anwenden.



Man schneide auf der längeren Seite AB mit der kürzeren AC das Stück AD ab, so ist BD = AB — AC.

Man errichte in A und in B Perpendikel = AC, ziehe durch die Punkte E und D die Gerade ED, welche so weit verlängert wird, daß ein von B aus gefälltes Perpendikel sie trifft, verlängere dieses Perpendikel rückwärts, bis es die mit AB durch E und H gezogene Parallelen EH im Punkte G schneidet, so ist EG = AB + AE, weil AG = BH = AC und $\sphericalangle$ EDA = FDB = HBG = HGB = $\frac{1}{2}$ R. und man hat: AB + AC : AB — AC = EG : BD = EF : BF

Nun ist aber, wenn man die Gerade EB ziehet EF : BF = sin. tot. : tang. FEB, also ist auch sin. tot. : tang. FEB = tang. $\frac{A+B}{2}$: tang. $\frac{A-B}{2}$.

Fig. 27.

log. AD	= 2,5954665	$\varphi - 45 = 10°, 49', 57''$
log. sin. C . . .	= 9,6810895	$\frac{C-D}{2} = 66°, 9', 32''$
	2,9143770	
log. sin. D . . .	= 9,5128131	folglich $C = 151°, 19', 32''$
log. sin. A . . .	= 9,2250918	$D \ldots = 19°, 0', 28''$
		$CD \ldots = 137,870$
log. AC	= 2,4271901	$\angle BCA = 102°, 44', 00''$
log. CD	= 2,1394688	$\angle DCB = 254°, 03', 32''$

$\triangle$ DAE.

log. AD	= 2,5954665	$\angle BAE = 73°, 50'$
log. AE	= 2,4728395	$\angle BAD = 32°, 20'$
log. tang. φ . .	= 10,1226270	DAE $= 41°, 30'$
lg. tang. $(\varphi - 45°)$	= 9,1408997	180
log. tang. $\frac{E+D}{2}$	= 10,4215142	$E+D = 138°, 30'$
log. tang. $\frac{E-D}{2}$	= 9,5684139	$\frac{E+D}{2} = 69°, 15'$

Es ist aber FEB gegeben, denn er ist um den halben Rechten verschieden von AEB, welchen die Proportion bestimmt: AC : AB = rad. : tang. AEB. Hat man also diesen Winkel berechnet, so schließt man: sin. tot. : tang. $(AEB - 45°) =$ tang. $\frac{C+B}{2}$: tang. $\frac{C-B}{2}$.

Dieser Satz läßt sich auch folgendermaßen ableiten. Aus der ersten Proportion folgt: tang. $\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}$ tang. $\frac{1}{2}(A+B)$. Wird auf der rechten Seite im Zähler und Nenner mit b dividirt, so ergiebt sich tang. $\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}$ tang. $\frac{1}{2}(A+B)$. Setzt man $\frac{a}{b} =$ tang. ψ so ist tang. $\frac{1}{2}(A-B) =$ tang. $\frac{\psi-1}{\psi+1}$ tang. $\frac{1}{2}(A+B) =$ tang. $(\psi - 45°)$. taug. $\frac{1}{2}(A+B)$.

Da die Logarithmen von a und b bekannt sind, so ist auch tang. ψ bekannt und deßhalb der Werth von tang. $\frac{1}{2}(A-B)$ etwas schneller als aus der ursprünglichen Formel zu berechnen.

Fig. 27.

log. AD	= 2,5954665	φ . . .	= 52°, 59′, 01″
log. sin. E . . .	= 9,9999874	$\varphi - 45°$	= 7°, 59′, 01″
	2,5954791	$\frac{E-D}{2}$	= 20°, 18′, 49″
log. sin. D . . .	= 9,8773604	E . . .	= 89°, 33′, 49″
log. sin. A . . .	= 9,8212646	D . . .	= 48°, 56′, 11″
log. AE	= 2,4728395	CDA	= 19°, 0′, 28″
log. DE	= 2,4167437	EDC	= 67°, 56′, 39″
		DE . .	= 261,062.

$\triangle$ EAF.

log. AE	= 2,4728395	BAF	= 90°, 50′
log. AF	= 2,1867156	BAE	= 73°, 50′
log. tang. φ . .	= 10,2861239	EAF	= 17°, 00′
lg. tang. $(\varphi - 45°)$	= 9,5024169		180°
log. tang. $\frac{F+E}{2}$	= 10,8255012		163°, 00′
		$\frac{F+E}{2}$	= 81°, 30′
log. tang. $\frac{F-E}{2}$	= 10,3279181	φ . . .	= 62°, 38′, 25″
		$\varphi - 45°$	= 17°, 38′, 25″
log. AE	= 2,4728395	$\frac{F-E}{2}$	= 64°, 49′, 38″
log. sin. F . . .	= 9,7438610		
	2,7289785	F . . .	= 146°, 19′, 38″
log. sin. E . . .	= 9,4577371	E . . .	= 16°, 40′, 22″
log. sin. A . . .	= 9,4659353	AED	= 89°, 33′, 49″
log. AF	= 2,1867156		
log. EF	= 2,1949138	FED	= 106°, 14′, 11″
		EF . .	= 156,644.

Berechnung des Inhaltes.

log. AB . . .	= 2,5051500
log. AC . . .	= 2,4271901
log. sin. BAC	= 9,5858771
	4,5182172; 2. $\triangle$ ABC = 32977,46.

Fig. 27.

log. AC . . . = 2,4271901
log. AD . . . = 2,5954665
log. sin. CAD = 9,2250918

4,2477484; 2. △ ACD = 17690,84.

log. AD . . . = 2,5954665
log. AE . . . = 2,4728395
log. sin. DAE = 9,8212646

4,8895706; 2. △ ADE = 77548,00

log. AE . . . = 2,4728395
log. AF . . . = 2,1867156
log. sin. EAF = 9,4659353

4,1254904; 2. △ AEF = 13350,28

2J = 141566,58
J = 70783,29

Obgleich wir uns aller bekannten Rechnungsvortheile und Abkürzungen bedient haben, so ist doch die Rechnung etwas weitläuftig geworden, weil zu viele Gegenstände zu suchen waren. Die Hauptpunkte, namentlich zum Zeichnen der Figur, d. h. die Längen und Breiten von den Punkten C, D, E, F aber haben wir nicht gefunden, und deßhalb wollen wir die Aufgabe auch nach den Regeln der neueren Polygonometrie behandeln *). Die Berechnung der Linien BC, BD, BE, BF und AC, AD, AE und AF geschieht ganz wie vorhin, nur ist nicht nöthig, die Linien selbst aufzuschlagen, indem deren Logarithmen genügen. Die Berechnung der Coordinaten für die Punkte C, D, E, F geschieht doppelt auf folgende Art:

*) Das Verfahren des Vorwärtsabschneidens kommt bei größeren Vermessungen, namentlich bei Festlegung schwer zugänglicher Punkte häufig vor und verdient bei Aufnahme von Bergkuppen ꝛc. die größte Beachtung.

log. BC . . . . . = 2,1018415
log. sin. CBA (54°, 36′) = 9,9112257
log. cos. CBA . . . . = 9,7628894
log. △y von C . . . . = 2,0130672 △y = + 103,05
log. △x „ . . . . . = 1,8647309 △x = + 73,24

log. AC . . . . . = 2,4271901
log. sin BAC (22°, 40′) = 9,5858771
log. cos. BAC . . . . = 9,9650899
log. △y von C . . . . = 2,0130672 (stimmt)
log. △x „ . . . . . = 2,3922800 △x = + 246,76

+ 73,24 + 246,76 = 320,00 = AB.

log. BD . . . . . = 2,3245044
log. sin. DBA (93°, 30′) = 9,9991892
log. cos. DBA . . . . = 8,7856753
log. △y von D . . . . = 2,3236936 △y = + 210,72
log. △x . . . . . = 1,1101797 △x = − 12,89

log. AD . . . . . = 2,5954665
log. sin. BAD (32°, 20′) = 9,7282271
log. cos. BAD . . . . = 9,9268314
log. △y von D . . . . = 2,3236936 (stimmt)
log. △x . . . . . = 2,5222979 △x = + 332,89

− 12,89 + 332,89 = 320,00 = AB.

log. BC . . . . . = 2,5694799
log. sin. EBA (50°, 15′) = 9,8858370
log. cos. EBA . . . . = 9,8057991
log. △y von E . . . . = 2,4553169 △y = + 285,31
log. △x „ . . . . = 2,3752790 △x = + 237,29

log. AE . . . . . = 2,4728395
log. sin. BAE (73°, 52′) = 9,9824774
log. cos. BAE . . . . = 9,4447197
log. △y . . . . . = 2,4553169 (stimmt)
log. △x . . . . . = 1,9175592 △x = 82,71.

+ 237,29 + 82,71 = 320,00 = AB.

log. BF . . . . . = 2,5526853
log. sin. FBA (25°, 37′) = 9,6339844
log. cos. FBA . . . . = 9,9554882
log. △y von F . . . . = 2,1866697 △y = + 153,70
log. △x . . . . . = 2,5081735 △x = + 322,24

log. AF . . . . . = 2,1867156
log. sin. BAF (90°, 50′) = 9,9999541
log. cos. BAF . . . . = 8,1626808
log. △y . . . . . = 2,1866697 (stimmt)
log. △x . . . . . = 0,3493964 △x = − 2,24.

+ 322,24 − 2,24 = 320,00 = AB.

Es sind sonach die Längen und Breiten bekannt, und wir haben Fig. 27. in der Doppelrechnung eine sehr schöne und gute Controle.

Die Berechnung des Inhalts ist nunmehr kurz folgende:

1.		2.	—	+	3
103,05	51,5	103,05	156,88	210,72	248,01
	73,2	210,72	86,13	285,31	250,18
	15 45	313,77	470 64	496,03	19 8408
	154 5	2	1568 8	2	24 801
	3605		94128		12400 5
	3774,95		125504		49602
			13512,0744		62047,1418

+	4.	5.	—
285,31	2 19,50	153,70	76,85
153,70	8 4,95	0	2,24
439,01	10 9750	2	30740
2	197 55		1 5370
	878 0		15 379
	17560		172,1440
	18646,5250		

Zusammenstellung.

+	—
3774,80	31512,07
62047,14	172,14
18646,52	13684,21
+ 84468,46	
— 13684,21	
Inh. = 70784,25	

Die Abweichung von 1 □′ liegt in den Decimalen. Wollen wir auch noch die Grenzwinkel und Grenzlinien berechnen, so verfahren wir folgendermaßen, indem wir uns eine Handzeichnung entwerfen und in dieser die Längen und Breiten einschreiben.

Fig. 27. Punkt C. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{103{,}0}{73{,}2}$ lg. 103,0 = 2,0128372 lg. 1030 = 2,0128372
lg. 73,2 = 1,8645111 lg. sin. 54°36′ = 9,9112257

10,1483261 2,1016015

$\alpha = 54°, 36'$
$\beta = 35°, 24,$

BC = 126,4.

„ D. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{107{,}7}{86{,}1}$ lg. . . . = 2,0322157 2,0322157
lg. . . . = 1,9350032 lg. sin. 51°,22′ = 9,8927385

10,0972125 2,1394772

$\alpha = 51°, 22'$
$\beta = 38°, 38'$

CD = 137,9.

„ E. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{74{,}6}{250{,}2}$ lg. . . . = 1,8727388 1,8727388
lg. . . . = 2,3982873 lg. sin. 16°,36′ = 9,4558926

9,4744515 2,4168462

$\alpha = 16°, 36'$
$\beta = 73°, 24'$

DE = 261,1.

„ F. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{131{,}6}{84{,}9}$ lg. . . . = 2,1192559 2,1192559
lg. . . . = 1,9289077 lg. sin. 57°,10′ = 9,9244092

10,1903482 2,1948467

$\alpha = 57°, 10'$
$\beta = 32°, 50'$

EF = 156,6.

„ A. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{153{,}7}{2{,}2}$ lg. . . . = 2,1866739 2,1866739
lg. . . . = 0,3424227 lg. sin. 89°,11′ = 9,9999556

11,8442512 2,1867183

$\alpha = 89°, 11'$
$\beta = 0°, 49'$

AF = 153,7.

$\sphericalangle B = 54°, 36'$ wie gemessen.
$\sphericalangle C = 360° - \alpha$ von D $- (90 - \beta$ von C$) = 254°, 02'$
$\sphericalangle D = \alpha$ von E $+ 90° - \beta$ von D $= 16°, 36' + 90° - 38°, 38' = 67°, 58'$
$\sphericalangle E = B$ von E $+ \beta$ von F $= 73°, 24' + 32°, 50' = 106°, 14'$
$\sphericalangle A = 180° - \alpha$ von A $= 180° - 89°, 11' = 90°, 49'$.

Jedenfalls ist die Rechnung nach dem neueren Verfahren, wenn auch nicht kürzer, doch leichter und übersichtlicher.

Endlich dürfte auch der Fall nicht selten vorkommen, daß man die Fläche zwischen der Waldgrenze und dem Hülfsvieleck als besonderes Polygon ansiehet und behandelt, wie durch Fig. 28. erläutert werden soll. BA ist eine Seite des Hauptpolygons und an diese schließt sich die Figur 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. an, welche, wenn man in Legung von Dreiecken durch die Lokalität behindert ist, als ein für sich bestehendes Polygon behandelt wird. Weil wir annehmen, daß diese Figur nicht zum Walde gehört, so haben wir dieselbe von B und nicht von A aus nummerirt und messen die zum Walde gehörigen Winkel, welche hier die äußeren Winkel des Polygons bilden. Fig. 28.

Wir wollen nunmehr noch zur Berechnung einiger Parzellen Anleitung geben, welche nicht selten vorkommen.

Wenn, wie in Fig. 29, die Station A außerhalb der Grenzlinie DE gewählt werden mußte, die Steine D und E aber durch Perpendikel festgelegt sind, so kann die Figur A, C, D, E, B auf die gewöhnliche Art nicht berechnet werden. Fig. 29.

Wenn man aber den sinus und cosinus des bei A gemessenen Winkels mit der Linie AB multiplicirt, so erhält man y und x vom Punkte B auf die Linie AC. Denkt man sich durch B eine Parallele zu AC gezogen, so ist, weil Winkel ABE = R das Azimuth von B = < A — 90 und sin. Az. B = cos. A; cos. Az. B = sin. A. Man hat sonach EH oder y von E = AB. sin. A + BE cos. A und AH oder x von E = AB cos. A + BE. sin. A und hierdurch läßt sich der Inhalt der Parcelle durch zwei Dreiecke und ein Parallel-Trapez berechnen.

Es ist nämlich $J = \frac{BE}{2} . AB - \frac{EH}{2} . AH + \left(\frac{CD + EH}{2}\right) CH$*).

Um sich die Herkunft der beiden Dreiecke klar zu machen, denke man sich eine Hülfslinie von A nach E gezogen.

Hätte man bei der Messung die Linie CA bis H verlängert

*) Daß man die vorliegende Parzelle auch durch ein negatives Dreieck und zwei positive Trapezien hätte berechnen können, ergiebt sich schon aus dem Anblick der Figur.

Fig.29. und von H das Perpendikel EH gefällt und gemessen, so würde die Coordinaten-Berechnung gespart worden sein, und man hätte Alles aus den Elementen berechnen können. Es ist deßhalb nicht genug anzurathen, überall, wo die Station nicht bei einem Grenzstein genommen werden konnte, auf den nächst vorhergehenden oder nächst folgenden Stein zwei Perpendikel von den zwei Polygonseiten zu
Fig.30. fällen. Hätte die Figur eine andere Gestalt, etwa die von Fig. 30; so ändert sich eigentlich nichts im Verfahren, wohl aber in den Zeichen für Sinus und Cosinus, weil $< A$ über 2 R. hinausfällt.

Setzt man die Winkel $HDE = \alpha$ und den an der Grenzlinie DE liegenden Winkel $EDC = \varphi = 90 - \alpha$, die Grenzlinie selbst aber x, so ist tang. $\alpha = \frac{EH}{DH} = \frac{AB \sin. A + BE \cos. A + CD}{CA - AB \cos. A - BE \sin. A}$ *)
$=$ cotang. φ. Will man den Ausdruck für tang. φ haben, so dreht man, weil $\frac{1}{\text{cotang.}} =$ tang. den Bruch nur herum und setzt

$$\text{tang. } \varphi = \frac{CA - AB \cos. A - BE \sin. A}{CD + AB \sin. A + BC \cos. A}$$

$$x = \frac{EH}{\sin. \alpha} = \frac{AB \sin. A + BE \cos. A + CD}{\sin. \alpha}$$ **).

Wir wollen ein Beispiel nach diesen Formeln und dann auch den Inhalt der Figur ACDEB berechnen.

Es sei $< A = 239°$; $AC = 870'$; $AB = 1000$; $BE = 260$; $CD = 350$, so ist alles Material vorhanden.

log. . . 1000	= 3,0000000	log. . 1000	= 3,0000000
log. sin. 239°	= 9,9330656	log. cos. 239	= 9,7118393
	2,9330656		2,7118393
	$\triangle y = -857{,}2$		$\triangle x = -515{,}0$

*) Man hat im zweiten und dritten Gliede des Divisors das Zeichen — gewählt, weil diese Theile der Axe auf der entgegengesetzten Seite von CA liegen. Da beide das Zeichen — erhalten, so erscheinen sie bei Ausrechnung der Formel positiv.

**) Zur Entwickelung dieser beiden Ausdrücke hat Hoßfeld, ein sonst tüchtiger Mathematiker, vier Druckseiten in seiner Schrift über Forsttaxation, 2. Bd. S. 86 — 90, verwendet.

log. . . 260 = 2,4149733 log. . . 260 = 2,4149733 Fig. 30.
log. sin. 149° = 9,7118393 log. cos. 149° = 9,9330656

2,1268126 2,3480389

$\triangle y' = +133{,}9$ $\triangle x' = -222{,}9$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{857{,}2 - 133{,}9 + 350}{870 + 515{,}0 + 222{,}9} = \frac{1073{,}3}{1607{,}9}$$

log. 1073,3 = 3,0307211
log. 1607,9 = 3,2062590

9,8244621 = log. tang. 33°, 43'

folglich $\varphi = 56°, 17'$

$$x = \frac{1073{,}3}{\text{sin. } 33°, 43'}$$

log. . . 1073,3 = 3,0307221
log. sin. 33°, 43' = 9,7443606

3,2863605 =

log. 1933,6.	+		+
J = 857,2	428,6	857,2	790,2
0	515,0	723,3	222,9
	214 300	1580 5	7111 8
	428 6	2	15804
	21430		15804
	220729,00		15804
	—		176135,58
723,3	186,6		
— 350,0	1607,9		
373,3	9647 4		
2	96474		
	128632		
	16079		
	300034,14		

Unsere vorliegende Figur besteht offenbar aus zwei positiven Theilen, den beiden Dreiecken nächst der Perpendikel CD und BE, und einem negativen Dreieck unterhalb der Station A.

Fig. 30. Bei der Inhalts-Berechnung mußten wir deßhalb das Dreieck ABF und das Parallel-Trapez BEGF positiv, nunmehr aber das △EGJ negativ und das Dreieck CDJ wieder positiv setzen. Weil der Punkt J in der Achse nicht bekannt ist — berechnen läßt sich derselbe allerdings — so setzen wir das Dreieck EGJ — △CDJ negativ, was durch den Ausdruck $\left(\frac{EG - CD}{2}\right) . CG.$ geschiehet.

Behufs Inhalts-Berechnung des anschließenden Hauptpolygons muß der Inhalt der ganzen Parzelle ACDEB abgezogen, sonach zu diesem Behufe die Zeichen für den Inhalt der Dreiecke und Trapezien gerade umgekehrt werden.

§. 10.

Messung des Details.

Wir treten nunmehr in das Innere unseres zu messenden Waldcomplexes ein, und wollen hier kennen lernen, was wir, forstlicher Zwecke wegen, besonders ausscheiden und angeben müssen.

1) Finden wir Flächen, welche fremdes Eigenthum sind, so verstehet es sich ganz von selbst, daß diese besonders vermessen und von der Waldfläche in Abzug gebracht werden müssen.

Eben so müssen Flächen, welche nicht zur Holzzucht bestimmt sind, aber doch zur Waldfläche gehören, ausgeschieden werden, wie alle den Forstbeamten verwilligte oder verpachtete Grundstücke, mögen dieselben in Gärten, Ackern, Wiesen oder ständigen Weiden bestehen. Die auf diesen Grundstücken etwa stehenden Gebäude mit ihren Hofräumen werden ebenfalls besonders gemessen und angegeben. Desgleichen sind Bäche, Flüsse, Teiche, Seen, zur Holzzucht untaugliche Brücher, Torfgräbereien ꝛc. besonders zu messen und demnächst in Riß zu bringen.

2) Ob und in wie weit Steinbrüche, Sand-, Lehm-, Thon- und Mergelgruben ꝛc. aufgenommen werden sollen, hängt von den Bestimmungen der Oberbehörde ab.

3) Es müſſen weiterhin alle durch die zu vermeſſende Wal- Fig.30.
dung ziehende Eiſenbahnen, Chauſſeen, Straßen und öffentliche Wege ſpeciell vermeſſen werden, während dieſes bei den Holzabfuhrwegen, wenn dieſelben nicht beſondere Grenzen von Wirthſchaftsfiguren bilden, nicht nöthig iſt, indem es genügt, dieſe Wege im Laufe der Vermeſſung überall im Bruillon zu bezeichnen und ſpäter aus freier Hand in die Karte einzuzeichnen. Sie haben meiſt keinen Einfluß auf den Holzertrag, indem ſich längs derſelben in Folge des vergrößerten Wurzel- und Aſtraumes — überhaupt Nahrungsraumes — ſo viele prädominirende Stämme bilden, daß durch dieſe der etwaige Verluſt durch die Wegfläche erſetzt wird. Sind überhaupt die Wege, wozu wir auch die Geſtelle und Schneiſen rechnen, nur ſo breit, daß ſich die äußerſten Zweigſpitzen der zu beiden Seiten derſelben ſtehenden Bäume im mittleren Alter nach vollendetem Höhenwuchſe beinahe berühren, ſo findet durch dieſelben ſelten Abgang am Holzertrage ſtatt, und es braucht deßhalb wenigſtens kein Flächenabzug am Holzboden zu geſchehen.

4) Wenn mehrere Diſtrikte in ein und daſſelbe Hülfsvieleck gefallen ſein ſollten, was aber ſelten und nur bei kleineren Diſtrikten vorzukommen pflegt, ſo müſſen dieſelben bei der Detailmeſſung getrennt werden, indem ſelbſtverſtändlich, daß alles, was als ſelbſtſtändig oder als Ganzes erſcheint, auch beſonders als ſolches bei der Vermeſſung behandelt werden muß.

5) Außer den Diſtriktsgrenzen müſſen auch die Grenzen der verſchiedenen Betriebsarten, wie Hoch-, Mittel-, Nieder- und Ausſchlagwald ꝛc. ꝛc. ſpeciell aufgenommen und berechnet werden.

Obgleich es keinem Zweifel unterliegt, daß in der Klaſſe des Hochwaldbetriebes das Laubholz vom Nadelholz, falls es nicht vermiſcht mit dieſem vorkommt, getrennt werden muß, ſo iſt es doch oft höchſt unnöthig, nunmehr wieder die verſchiedenen Holzarten trennen zu wollen, namentlich wenn ſie nicht in reinen Beſtänden vorkommen. Wo ſich z. B. reine Tannen- und reine Fichtenbeſtände vorfinden, wird man dieſe Beſtände, namentlich wenn es wirth-

Fig. 30. schaftliche Zwecke erheischen, stets trennen, was aber nicht nöthig ist, wenn dieselben allmählig in einander übergehen, und noch weniger, wenn die Holzarten gemischte Bestände bilden. Ganz dasselbe findet bei dem Laubholze statt, weßhalb wir hierüber nur bemerken wollen, daß alle Ausscheidungen, welche sich nach Maßgabe der forstlichen Zwecke nicht als wesentlich herausstellen, auch überflüssig sind und nur als unnöthige Zeit- und Geldverschwendung angesehen werden können.

6) Bodenverschiedenheiten, gleichgültig ob in Folge der Grundgebirgsart, oder der Tiefgründigkeit, oder des Mischungsverhältnisses der verschiedenen Erdarten, oder des Feuchtigkeitsgrades, oder der Lage und Exposition, sind besonders zu messen, zu berechnen und in die Karte einzutragen. Häufig werden durch Bodenverschiedenheiten Betriebsklassen oder wenigstens bleibende Abtheilungen gebildet, so daß durch deren Aufnahme meist mehrfache Zwecke erreicht werden. Im Gebirge wechseln die Bodenverschiedenheiten in Folge von Gebirgsrücken, Gebirgskanten und Wellenform oft so schnell und in solch kleinen Parzellen, daß eine genaue Ausscheidung der verschiedenen Bonitäten gar nicht möglich ist. In diesem Falle nimmt man eine durchschnittliche Bonität für die ganze Abtheilung an *).

7) Verschiedenheiten im Holzbestande bei gleicher Bodengüte müssen dann berücksichtigt werden, wenn sie in verschiedene Altersklassen fallen, also im Ausschlagwalde bis zu 5, im Hochwalde um 10 — 20 Jahre von einander abstehen, und wenn der Holzbestand bei gleichem Alter im Schlusse so verschieden ist, daß eine Ausscheidung für nöthig befunden wird. Bei horstweisen Beständen, sei es, daß diese bloß im Alter oder auch in der Bestandsvollkommenheit grell wechseln, muß man nicht kleinlich verfahren, nicht jeden einzelnen Horst, nicht jede einzelne kleine ertragslose Stelle herausge-

*) Dem Verfasser sind in praxi häufig Fälle vorgekommen, wo auf einer Fläche von 4—5 Morgen alle Bodenverschiedenheiten von der geringsten bis zur höchsten Ertragsfähigkeit in allen Zwischenstufen gewechselt haben.

messen wissen wollen, sondern man muß das Ganze ins Auge fassen Fig.30.
und sich die Frage vorlegen, wie und auf welche Art der fragliche Bestand bei einer Betriebsregulirung behandelt und eingetheilt werden wird, und hiernach müssen auch die Operationen des Geometers bemessen werden.

Größere holzleere Flächen oder Blösen wird man stets für sich behandeln, während kleine Flächen dieser Art, in erwachsenen Beständen liegend, gleichsam wie Horste anzusehen sind und entweder ganz übergangen, oder nach dem Augenmaße geschätzt werden können, welch letzteres jedoch stets besser von dem Forsttaxator als von dem Forstgeometer geschiehet.

8) Besondere forstwirthschaftliche Anlagen, wie Saatkämpe, Pflanzgärten, falls dieselben von einiger Ausdehnung sind, werden stets besonders zu vermessen sein, so wie es sich ganz von selbst verstehet, daß alle zur Bildung von Wirthschaftsfiguren und Hauungsplänen nöthige Messungen speciell vorgenommen werden müssen.

9) Liegt die zu vermessende Waldung in verschiedenen Ortsgemarkungen und fallen deren Grenzen nicht mit denen von Distrikten und Abtheilungen zusammen, so muß eine besondere Aufnahme derselben statt finden, ebenso wie etwaige Berechtigungsgrenzen, ständige Viehtriften ꝛc. ꝛc.

10) Wir empfehlen weiter, sämmtliche Bergkuppen aufnehmen zu lassen, falls die Berge und Bergeszüge später in die Karte eingezeichnet werden sollen. Glaubt sich die Direktivbehörde mit Horizontal-Plan-Karten begnügen zu können, so kommt es auf die relative Höhe der einzelnen Berge nicht an und es kann dann auch diese Aufnahme unterbleiben *).

Es entstehet nunmehr noch die Frage, wie und auf welche Art, und mit welchen Instrumenten die Detailaufnahme statt finden

*) So lange man durch Bergzeichnungen nicht die Höhen der Bergkuppen und Bergebenen, nicht den Schuß, welchen vorliegende Berge den anderen gewähren, neben dem Steigungsverhältniß und der Richtung erkennbar angeben kann, haben diese in forstwirthschaftlicher Beziehung nur höchst geringen Werth.

Fig.30. soll? indem hierbei meist keine so große Genauigkeit verlangt wird wie bei der Vermessung des ganzen Waldkörpers.

Jedenfalls müssen die zur Waldfläche nicht gehörigen Grundstücke genau gemessen und berechnet werden. Ebenso verlangt die Aufnahme von Eisenbahnflächen, Chausseen, Straßen und öffentlichen Wegen, desgleichen der Distriktsgrenzen und Betriebsklassen polygonometrische Behandlung und Messung der Winkel mittelst des Theodolithen, während Bestands, selbst Bodenverschiedenheiten ꝛc. mittelst Anwendung der Bousssole aufgenommen werden können.

Ein gewandter Geometer, welcher zugleich ein guter Rechner ist, wird lieber nach streng wissenschaftlichen Regeln verfahren und mit dem Theodolithen operiren, als sich eines unzuverlässigen Instrumentes bedienen und seine Operationen auf mechanisches Zeichnen und Abgreifen von der Karte gründen; denn das erstere Verfahren ist für denjenigen, welcher Gewandtheit hat, nicht viel zeitraubender als das letztere, dagegen vielmal sicherer.

Wenn die Coordinaten von den Grenzpunkten der Distrikte berechnet und zusammengestellt sind, so werden die eigentlichen Detailmessungen nur als Vermessungsrouten oder Züge, als selbstständige Polygone nur dann angesehen, wenn sie sich innerhalb des
Fig.31. Distrikts schließen. Die Figur 31 möge dieses erläutern.

Um die Nordseite mit besserem Boden auszuscheiden, wurde die Route von M nach 1, 2, 3, 4 nach F gemessen. Auf dieser Route sind die Coordinaten-Differenzen von fünf Punkten zu berechnen. Sie werden mit vorhergehender Ordinate und Abscisse M zusammengestellt und müssen sich an y und x vom Punkte F anschließen. Dasselbe gilt von der Route von C über 10, 4 nach F. Dagegen schließt sich das Bergköpfchen als ein kleines Polygon von 5 Seiten und wird für sich berechnet. Wäre dagegen der um das Köpfchen liegende Bestand nicht von gleicher Beschaffenheit und erschiene es räthlich den südlichen Hang noch abzuschneiden, was durch eine oder zwei Linien von 7 bis 10 geschehen könnte, so würde auch das Köpfchen als Polygon verschwinden,

indem man die Route von N über 5, 6, 7, 10 nach F rechnen Fig.31.
und corrigiren würde. Die Punkte von 5 über 9, 8 bis 7 bildeten dann eine kleine Route für sich und würden auf y und x vom Punkte 7 corrigirt. Daß wir bei der Route von N über 5, 6, 7, 10 nicht nach C, sondern nach F gegangen sind, geschah aus Consequenz, weil wir die zu vermessende Fläche stets vor uns haben wollen. Indessen hätte man ebensowohl vom Punkte C über 10 nach 7, 6, 5 und N rechnen können. Sollte das Hauptpolygon in den Coordinaten nicht sonderlich geschlossen haben und wir eine Revision wünschen oder für nöthig halten, so bilden wir uns jetzt 3, ja selbst 4 Polygone und können nun bei dem polygonometrischen Verfahren leicht finden, ob und in welcher Route sich etwa ein Fehler eingeschlichen hat. Messen wir dagegen im Inneren mit der Boussole, so hat alle Controle ein Ende, und es bleibt ein etwaiger Fehler im Umfange unentdeckt und unverbessert.

In Waldungen, welche in regelmäßige Jagen eingetheilt sind, können alle innerhalb der einzelnen Jagen vorkommende Verschiedenheiten unbedenklich mit der Boussole aufgenommen werden, indem jedes Jagen seine feste Grenzen hat.

Die Berechnung der Bodenwechsel und Bestandsfiguren kann mittelst eines Planimeters geschehen, deren in neuerer Zeit mehrere construirt worden sind, welche den Inhalt durch bloßes Umfahren der Umfangslinien, über $\frac{1}{500}$, öfters bis auf $\frac{1}{1000}$ der Wirklichkeit angeben.

Alle zu forstwirthschaftlichen Zwecken im Innern nöthigen Ausscheidungen müssen dem Forstmanne überlassen bleiben und wo möglich schon vor der eigentlichen Vermessung bestimmt und — in nicht zu kurzen Linien — begrenzt werden. Hierdurch werden die Zwecke der Vermessung wesentlich gefördert und gesichert. Nach beendigter Vermessung und Chartirung sollte für jeden größeren Forstcomplex — Wirthschaftsganzes — ein vollständiges Wegenetz entworfen und in die Karte eingezeichnet werden, selbstredend nachdem die einzelnen Wegestrecken abgewogen — nivellirt — und aufgenommen sind.

Fig. 31.

§. 11.

Vereinfachung der Grenzen und Anfertigung eines Grenzregisters.

Sehr häufig kommen Grenzstrecken vor, wo die Grenzpunkte für sehr kurze Linien bestimmt, die Grenze also sehr gebrochen und mit vielen auswärts und einwärts gehenden Winkeln versehen ist. Diese besser zu reguliren und möglichst zu strecken, ohne weder den Waldeigenthümer noch den Angrenzer zu benachtheiligen, liegt im wohlverstandenen Interesse beider, indem nicht nur an Grenzzeichen, sonach an Kosten der Grenzerhaltung gespart, sondern auch die Cultur der beiderseitigen Grundstücke erleichtert wird *). Wir wollen einige Fälle dieser Art behandeln und beginnen unsere mathematische Betrachtung mit dem einfachsten:

Fig. 32. 1) Es seien nämlich a, b, c, d, Fig. 32, vier Grenzpunkte, wovon zwei entfernt und die Ecken bei b und c der Art abgeschnitten werden sollen, daß Zu- und Abgang an Waldfläche sich gleich bleiben. Man soll vom Grenzpunkte d abgehen und den Punkt z in der Grenzlinie ab; sodann aber auch den Grenzwinkel bei z und die Länge der neuen Grenzlinie dz finden.

Es sind bekannt $bc = a$; $cd = b < abc = \alpha < bcd = \beta$. Man nehme ab zur Achse und berechne die Coordinaten von c und d und aus diesen den Inhalt des verschobenen Vierecks zbcd, welches aus dem $\triangle bcf +$ Trapez $cdef - \triangle dez$ bestehet.

Da dieser Inhalt nach den Bedingungen der Aufgabe $= 0$ sein soll, so muß das $\triangle dez = \triangle bcf +$ Trapez cdef. Setzen wir dessen Inhalt $= A$ und $bz = z$; $de = y$; $be = x$; so ist $A = \frac{(x+z)\,y}{2}$ folglich $z = \frac{2A}{y} - x$. Da x und y leicht zu berechnen sind, so ist auch z bekannt.

Es sei $a = 432$; $b = 170$; $\alpha = 236°, 43'$; $\beta = 114°, 23'$ so ist:

*) Jeder praktische Forstmann weiß, daß scharfe Vorsprünge an den Grenzen meist ohne genügenden Holzbestand bleiben.

log. . . . . 432 = 2,6354837 log. . . . . 432 = 2,6354837 Fig. 32.
log. sin. 236°, 43′ = 9,9221891 log. cos. 236°, 43′ = 9,7393980

2,5576728 2,3758817

$\triangle y = -361{,}1$ $\triangle x = -237{,}6$

log. . . . 170 = 2,2304489 log. . . . 170 = 2,2304489
log. sin. 171°, 6′ = 9,1895195 log. cos. 171°, 6′ = 9,9947393

1,4199684 2,2251882

$\triangle y = +26{,}3$ $\triangle x = -167{,}9$

+		+	
−361,1	180,5	−361,1	347,9
0	237,6	−334,8	167,9
	1083 0	695 9	3131 1
	12635	2	24353
	5415		20874
	3610		3479
	42886,80		58412,41

42886,8
58412,4

101299,2 = A
2

202598,4 : 334,8 = 605,1 − 405,5 = 199,6 = z.

$\text{tang. } \alpha = \frac{334{,}8}{605{,}1}$ log. 334,8 = 2,5247854
log. 605,1 = 2,7818272

9,7429582 =
log. tang. 28°, 58′.

$dz = \frac{de}{\text{sin. } \alpha} = \frac{334{,}8}{\text{sin. } 28°, 58'} =$ 2,5247854
9,6851151

2,8396703 = log. 691,3.

2) Es sei a, b, c, d, e, f, Fig. 33, eine gebrochene Waldgrenze von 6 Steinen, welche unbeschadet des Flächenmaßes in die gerade Fig. 33.

Fig. 33. af von zwei Steinen verwandelt werden soll. Man soll den Punkt f, den $< efa = \alpha$ und die Länge der Grenzlinie af berechnen.

Auch hier nehme man die ihrer Lage nach bekannte, ihrer Länge nach noch unbekannte Linie ef zur Achse an und berechne die Ordinaten und Abscissen bis zum Punkte a und hierauf den Flächeninhalt von ed ꝛc. bis ag. Setzt man diesen Flächengehalt, dem des $\triangle afg$ gleich, so erhält man einen Ausdruck für die unbekannte $ef = z$, indem auch hier $J = \left(\frac{x+z}{2}\right) . y$ und hieraus $z = \frac{2J}{y} - x$ auf ganz gleiche Art, wie oben für den einfacheren Fall. — Sollte die gebrochene Grenze die gerade auch mehrmals durchschneiden, so verändert dieses die Sache gar nicht, wie der aufmerksame Leser nunmehr einsehen wird.

Hätte man nicht die unbekannte ef, sondern die bekannte ab als Achse angenommen, so würde sich die Auflösung folgendermaßen bezwecken lassen.

Man setze die Ordinate von e, bis wohin wir rechnen können $= y$ und den Inhalt von a bis $e = J$, so ist $\triangle y$ von $f = ef \sin. \delta$ und $\triangle x = ef. \cos. \delta$, sonach der Inhalt der ganzen Fläche oder Null $= J$ bis $e + \left(\frac{y + y + z. \sin. \delta}{2}\right) z. \cos. \delta + \left(\frac{y + z \sin. \delta}{2}\right) (x + z. \cos. \delta)$. Aus dieser Gleichung ergiebt sich nach gehöriger Rechnung der Werth von

$$z = \frac{2J - xy}{x. \sin. \delta - y. \cos. \delta},$$

wenn man das Azimuth vom Punkte d mit δ bezeichnet *). Wir wollen uns dabei nicht aufhalten und ein Beispiel für z als Achse, ausführen:

*) Wir haben diesen Fall nur angeführt, um darzuthun, zu welchen Verwickelungen es führt, wenn man eine bekannte Linie ab in der Rechnung nicht benutzt, dagegen eine unbekannte ef in dieselbe einführt. Der Anfänger möge sich dieses wohl merken.

Fig. 33.

$de = 113'$; $dc = 86'$; $cb = 80'$; $ba = 147'$

$\sphericalangle e = 116°$; $\sphericalangle d = 164°$; $\sphericalangle c = 216°$; $\sphericalangle b = 219°$.

log. . . 113	= 2,0530784	log. . . . 113	= 2,0530784
log. sin. 116°	= 9,9536602	log. cos. 116°	= 9,6418420
	2,0067386		1,6949204
	+ 101,6		— 49,5
	0		0
	+ 101,6		— 49,5
log. . . . 86	= 1,9344984	log. . . . 86	= 1,9344984
log. sin. 100°	= 9,9933515	log. cos. 100°	= 9,2396702
	1,9278499		1,1741686
	+ 84,7		— 14,9
	+ 101,6		— 49,5
	+ 186,3		— 64,4
log. . . . 80	= 1,9030900	log. . . . 80	= 1,9030900
log. sin. 136°	= 9,8417713	log. cos. 136°	= 9,8569341
	1,7448313		1,7600241
	+ 55,6		— 57,6
	+ 186,3		— 64,4
	+ 241,9		— 122,0
log. . . . 147	= 2,1673173	log. . . . 147	= 2,1673173
log. sin. 175°	= 8,9402960	log. cos. 175°	= 9,9983442
	1,1076133		2,1656615
	+ 12,8		— 146,4
	+ 241,9		— 122,0
	+ 254,7		— 268,4

Inhaltsberechnung.

101,6	50,08	101,6	143,95
0	49,5	186,3	14,9
	250 40	287,9	129 555
	4507 2	2	575 80
	20032		1439 5
	2478,960		2144,855

Fig. 33.

	—		—
186,3	219,1	241,9	248,3
241,9	57,6	254,7	146,4
438,2	1314,6	496,6	993,2
2	15337	2	14898
	10955		9932
	12620,16		2483
			36351,12

Zusammenstellung.

+	—
	2478,96
	2144,85
	12620,16
	36351,12
	53595,09.

Da $z = \frac{2.J}{y} - x$ so erhalten wir

$$z = -\frac{2 \times 53595,09}{254,7} - (-268,4) = -152,4$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{254,7}{420,8} \quad \begin{array}{l} \log. 254,7 = 2,4060289 \\ \log. 420,8 = 2,6240757 \end{array}$$

$$9,7819532 =$$

$$\log. \text{tang. } 31°, 11'$$

$$af = \frac{254,7}{\sin. 31°, 11'} = \begin{array}{r} 2,4060289 \\ 9,7141437 \end{array}$$

$$2,6918852 =$$

$$\log. 491,9.$$

3) Wenn die ab- und zugehenden Flächen im Werthe nicht gleich, sondern im Verhältniß von m : n verschieden angenommen werden müssen, so daß, wenn die eine Fläche x Ruthen, die andere $\frac{m}{n}$ x Ruthen enthalten soll, so wird die Auflösung viel schwieriger.

In diesem Falle gehet an dem abzutretenden Theil der Fläche ein unbekannter Theil zu, während an der andern einzutauschenden Fläche ein unbekannter Theil abgehet. Fig.33.

Um den Inhalt des negativen Theiles $M = -x$, so wie den des positiven Theiles $N = \frac{m}{n} x$ berechnen zu können, müssen wir den Punkt z, worin die neue Grenzlinie die alte CD schneidet, resp. das Stück cz oder dz zu ermitteln suchen, und zu diesem Behufe außer der Unbekannten $AH = \omega$ noch eine zweite Unbekannte in Rechnung ziehen und uns deßhalb zwei Gleichungen zu bilden suchen, was auf nachstehende Art geschehen kann. Fig.34.

I. Der Inhalt der ganzen Figur ABCDEFGH wird nach der oben S. 33 und 34 entwickelten Formel durch folgenden Ausdruck gefunden:

$$2J \text{ oder } \frac{m}{n} 2x \dots 2x = \frac{m-n}{n} . 2x = \omega \,(b.\sin.A - c.\sin.(A+B) + d.\sin.(A+B+C) - e.\sin.(A+B+C+D + f.\sin.(A+B+C+D+E) - g.\sin.(A+B+C+D+E+F)) + b\,(c.\sin.B - d.\sin.(B+C) + e.\sin.(B+C+D) - f.\sin.(B+C+D+E) + g.\sin.(B+C+D+E+F)) + c\,(d.\sin.C - e.\sin.(C+D) + f.\sin.(C+D+E) - g.\sin.(C+D+E+F)) + d\,(e.\sin.D - f.\sin.(D+E) + g.\sin.(D+E+F)) + e\,[f.\sin.E - g.\sin.(E+F)] + f.g.\sin.F.$$

Setzt man den mit ω multiplicirten Coefficienten $= \lambda$ und die übrigen, lauter bekannte Größen enthaltenden Glieder $= \mu$, so reducirt sich die Gleichung auf folgende: $\omega\lambda + \mu$.

II. Der positive Theil der Figur nämlich zDEFG wird, $dz = z$ gesetzt, durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$N \text{ oder } \frac{m}{n} . 2x = z\,(e.\sin.D - f.\sin.(D+E) + g.\sin.(D+E+F)) + e\,(f.\sin.E - g.\sin.(E+F)] + fg\sin.F = z\lambda' + \mu'$$

Fig.34. wo λ' den Coefficienten von z und μ' die übrigen bekannten Glieder des Ausdruckes bezeichnet.

III. Der negative Theil, oder

$$M = -2x = (d-z)\,[c.\sin. C - b.\sin.(C+B) + \omega.\sin.(C+B+A)]$$
$$+ c\,[b.\sin. B - \omega.\sin.(B+A)]$$
$$+ b\,\omega.\sin. A =$$
$$= (d-z)\,(\alpha+\beta\omega) + \gamma\omega + \delta,$$

wenn man den Coefficienten von $d - z = \alpha$; die von $\omega = \beta$ und γ und den bekannten Theil $= \delta$ setzt.

Aus diesen drei Gleichungen haben wir nun den Werth der drei unbekannten x, z und ω zu ermitteln.

$$\text{Aus II folgt } \ldots z = \frac{\frac{m}{n}.2x - \mu'}{\lambda'}$$

$$\text{Aus III folgt } d - z = -\frac{2x - \gamma\omega - \delta}{\alpha + \beta\omega}.$$

Aus voriger Gleichung den Werth von z in diese substituirt giebt

$$d = \frac{\frac{m}{n}2x - \mu'}{\lambda'} - \frac{2x - \gamma\omega - \delta}{\alpha + \beta\omega}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich der Werth von

$$2x = \frac{(d\lambda' + \mu')\,(\alpha + \beta\omega) + \lambda'\,(\delta + \gamma\omega)}{\alpha + \beta\omega - \frac{n}{m}\lambda'}.$$

Wird dieser Werth für 2x in die Gleichung I substituirt, so ist

$$\frac{n}{n-m}(\lambda\omega + \mu) = \frac{(d\lambda' + \mu')\,(\alpha + \beta\omega) + \lambda'\,(\delta + \gamma\omega)}{\alpha + \beta\omega - \frac{n}{m}\lambda'}$$

Diese Gleichung gehörig reducirt und nach Potenzen von ω geordnet giebt:

$$\omega^2 + \omega \cdot \frac{1}{\beta\lambda}\left(\alpha\lambda + \beta\mu - \frac{n}{m}\lambda\lambda' - \frac{m-n}{m}(\beta.d.\lambda' + \beta\mu' + \gamma\lambda')\right) =$$
$$= \frac{1}{\beta\lambda}\left[\frac{m-n}{m}(\alpha\,d\lambda' + \alpha\mu' + \delta\lambda') - \alpha\mu + \frac{n}{m}\mu\lambda'\right].$$

Setzt man den Coefficienten von $\omega = P$ und den nur bekannte Fig.34.
Größe enthaltenden Theil der Gleichung $= Q$, so reducirt sich dieselbe auf $\omega^2 + \omega . P = Q$ folglich

$$\omega = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}P^2 + Q} - \tfrac{1}{2}P,$$

wenn man das Quadrat ergänzt und die Gleichung auflöst.

Es ist nicht zu verkennen, daß der Werth für ω mühsam zu berechnen ist, allein die Wichtigkeit der Aufgabe macht auch eine mühsame Auflösung leicht. Wir wollen nunmehr folgendes Beispiel ausführen:

Es sei $AB = b = 92'$; $BC = c = 101'$; $CD = d = 93'$; $DE = e = 104'$; $EF = f = 80'$; $FG = g = 107'$ und $A = 259°$; $B = 193°$; $C = 237°$; $D = 154°$; $DE = 80°$; $F = 194°$; $m : n = 9 : 8$.

Sonach:

A	= 259°	= − 79°	
A+B.	= 452°	= + 92°	= +88°
A+B+C	= 689°	= − 329°	= −31°
A+B+C+D . .	= 843°	= + 123°	= +57°
A+B+C+D+E .	= 923°	= − 203°	= −23°
A+B+C+D+E+F	= 1117°	= + 37°	
B	= 193°	= − 193°	= − 13°
B+C	= 430°	= + 70°	
B+C+D . . .	= 580°	= − 224°	= − 44°
B+C+D+E .	= 664°	= − 304°	= − 56°
B+C+D+E+F	= 858°	= + 138°	= + 42°
C	= 237°	= − 237°	= − 57°
C+D . . .	= 391°	= − 391°	= + 31°
C+D+E .	= 471°	= + 111°	= + 69°
C+D+E+F	= 665°	= − 305°	= − 55°
D . . .	= 154°	= + 154°	= + 26°
D+E .	= 234°	= − 54°	
D+E+F	= 428°	= + 68°	

Fig. 34.

$$E \;.\; = 80^\circ = +\,80^\circ$$
$$E + F = 274^\circ = -\,274^\circ = -\,86^\circ$$
$$F = 194^\circ = -\,194^\circ = -\,14^\circ.$$

Wir erhalten nunmehr:

α = c. sin. C — b. sin. (C + B) = — 171,158.
(—84,706) (+ 86,452)

β = sin. (A + B + C . . . = — 0,515.

γ = b. sin. A — c. sin. (A + B) = — 191,244.
(—90,310) (+ 100,939)

δ = b. c. sin. B . . . . . = — 2090,244.
(— 2090,244)

λ = b. sin. A — c. sin. (A + B) + d. sin. (A + B + C)
(— 90,310) (+ 100,939) (— 47,899)
— e. sin. (A + B + C + D) + f. sin. (A + B + C + D + E)
(+ 87,222) (— 31,258)
— g. sin. (A + B + C + D + E + F) = — 422,022.
(+ 64,394)

μ = b. (c. sin. B — d. sin. (B + C) + e. sin. (B + C + D)
(— 22,720) (+ 87,391) (— 72,245)
— f. sin. (B + C + D + E) + g. sin. (B + C + D + E + F))
(— 66,323) (+ 71,597)
= — 4088,112.
+ c. (d. sin. C — e. sin. (C + D) + f. sin. (C + D + E)
(— 77,996) (+ 53,564) (+ 74,687)
— g. sin. (C + D + E + F)) = + 3108,377.
(— 87,649)
+ d. (e. sin. D — f. sin. (D + E) — g. sin. (D + E + F)) = + 19485,360
(+ 45,591) (— 64,721) (+ 99,209)
+ e. (f. sin. E — g. sin. (E + F)) = + 19294,500.
(+ 78,785) (— 106,739)
+ fg. sin. F = — 2070,851; der ganze Ausdruck = + 35729,274.
(—2070,851)

λ' = e. sin. D — f. sin. (D + E) + g. sin. (D + E + F) = + 209,521.
(+45,591) (— 64,721) (+ 99,209)

μ' = ef sin. E — eg. sin. (E + F) + fg. sin. F = + 17223,639.
(+8193,600) (— 11100,890) (— 2070,851)

Hiernach wird: Fig.34.

$\frac{\alpha\lambda}{\beta\lambda} = \frac{\alpha}{\beta} = \ldots\ldots\ldots + 332{,}346.$

$\frac{\beta\mu}{\beta\lambda} = \frac{\mu}{\lambda} = \ldots\ldots\ldots - 84{,}688.$

$\frac{n}{m} \cdot \frac{\lambda\lambda'}{\beta\lambda} = \frac{n}{m}\frac{\lambda'}{\beta} = \ldots\ldots - 361{,}64.$

$\frac{m-n}{m} \cdot \frac{d\,\beta\lambda'}{\beta\lambda} = \frac{m-n}{m}\frac{d\lambda'}{\lambda} = \ldots - 5{,}13.$

$\frac{m-n}{m} \cdot \frac{\beta\mu'}{\beta\lambda} = \frac{m-n}{m}\frac{\mu'}{\lambda} = \ldots - 4{,}53.$

$\frac{n-m}{n} \cdot \frac{\gamma\lambda'}{\beta\lambda} = \frac{n-m}{n}\frac{\gamma\lambda'}{\beta\lambda} = \ldots - 20{,}48.$

$\frac{m-n}{m} \cdot \frac{\alpha\,d\lambda'}{\beta\lambda} = \ldots\ldots\ldots - 1704{,}6.$

$\frac{m-n}{m} \cdot \frac{\alpha.\mu'}{\beta.\lambda} = \ldots\ldots\ldots - 1506{,}7.$

$\frac{m-n}{n} \cdot \frac{\delta.\lambda'}{\beta.\lambda} = \ldots\ldots\ldots - 223{,}8.$

$\frac{\alpha.\mu}{\beta.\lambda} = \ldots\ldots\ldots\ldots - 28130{,}6.$

$\frac{n}{m} \cdot \frac{\mu\lambda'}{\beta\lambda} = \ldots\ldots\ldots + 30609{,}6.$

Es ist sonach

$P = +332{,}346 - 84{,}678 + 361{,}64 + 5{,}13 + 4{,}43 + 20{,}48$
$= +639{,}45;$

$\frac{1}{2}P = +319{,}72;\ \frac{1}{4}P^2 = 102220{,}88\ \ldots$

$Q = -1704{,}60 - 223{,}84 - 1506{,}74 + 28130{,}60 + 30609{,}60 =$
$= +55305{,}02.$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2 + Q} = \sqrt{157525{,}98} = 396{,}9$$

folglich $\omega = 396{,}9 - 319{,}7 = 77{,}2.$

Der Grenzpunkt liegt sonach + 77,2 von A entfernt in H. Um eine Controle für die Richtigkeit der Rechnung zu erhalten,

Fig. 34. berechne man sich den Punkt z, worin die neue Grenzlinie GH die alte Grenzlinie CD schneidet, was auf mehrfache Art geschehen kann.

Bilden wir uns zwei Ausdrücke für die positive und negative Fläche, so erhalten wir:

I. $2x = \omega\, b.\ \sin.\ A + b\,c.\ \sin.\ B + c\,d.\ \sin.\ C - c\,z.\ \sin.\ C.$
$- \omega\, c.\ \sin.\ (A+B) - b\,d.\ \sin.\ (B+C) + b\,z.\ \sin.\ (B+C)$
$+ \omega\, d.\ \sin.\ (A+B+C) - \omega\, z.\ \sin.\ (A+B+C).$

II. $\frac{m}{n} 2x = z\,(e.\ \sin.\ D - f.\ \sin.\ (D+E) + g.\ \sin.\ (D+E+F))$
$+ e\,f.\ \sin.\ E + f\,g.\ \sin.\ F - e\,g.\ \sin.\ (E+F).$

Wird der Werth für $2x$ aus I für $2x$ in II substituirt, so ergiebt sich nach gehöriger Reduktion

$$z = \frac{m}{n}(\omega\, b.\ \sin.\ A + bc\ \sin.\ B + c\,d.\ \sin.\ C - \omega\, c.\ \sin.\ (A+B)$$
$$- b\,d.\ \sin.\ (B+C) + \omega\, d.\ \sin.\ (A+B+C)) - e\,f.\ \sin.\ E$$
$$- f\,g.\ \sin.\ F + e\,g.\ \sin.\ (E+F):$$
$$(e.\ \sin.\ D - f.\ \sin.\ (D+E) + g.\ \sin.\ (D+E+F) + \frac{m}{n}$$
$$(c.\ \sin.\ C - b.\ \sin.\ (B+C) + \omega.\ \sin.\ (A+B+C)).$$

Da die meisten Theile dieser Gleichung bereits berechnet sind, so ist die Lösung nicht aufenthaltlich. Es ist nämlich:

1) $+\omega\, b.\ \sin.\ A$	= −	6971,9
$+ b\,c.\ \sin.\ B$	= −	2090,234
$+ c\,d.\ \sin.\ C$	= −	7877,630
$- \omega\, c.\ \sin.\ (A+B)$	= −	7792,4
$- b\,d.\ \sin.\ (B+C)$	= −	8040,000
$+ \omega\, d.\ \sin.\ (A+B+C)$	= −	3697,8
Sma.	= −	36469,9 × $\frac{9}{8}$ = − 41034,9
2) $- e\,f.\ \sin.\ E - f\,g.\ \sin.\ F + e\,g.\ \sin.\ (E+F)$	= −	17223,639
3) $e.\ \sin.\ D - f.\ \sin.\ (D+E) + g.\ \sin.\ (D+E+F)$	= +	209,521
4) $\frac{m}{n}(c.\ \sin.\ C - b.\ \sin.\ (B+C) + \omega.\ \sin.\ (A+B+C)$	= −	234,964

Die Zahlen unter 1 und 4 müssen mit dem entgegengesetzten Zeichen in Rechnung genommen werden, weil bisher die äußeren Winkel A, B, C in Betracht gekommen sind oder auch, weil oben in Gleichung I, 2x negativ gesetzt werden muß. Geschiehet dieses, so erhalten wir für den Werth des Zählers $= +\ 23811{,}3$ und für den Werth des Nenners $\ldots\ldots = +\ 446{,}8$. Fig. 34.

Es ist sonach $z = \frac{23811{,}3}{446{,}8} = 53{,}3$ und $d - z = d'$ $93 - 53{,}3 = 39{,}7$.

Die Berechnung des Inhaltes der beiden Stücke ist nunmehr sehr leicht; es ist nämlich:

$$M \text{ oder } x = (\omega b.\sin.A + bc.\sin.B + b\,d'.\sin.C - \omega c.\sin.(A+B) - bd'\sin.(B+C) + \omega d'.\sin.(A+B+C)) : 2 = 12613{,}8.$$

$$N \text{ oder } \frac{m}{n}x = (ze.\sin.D + ef.\sin.E + fg.\sin.F - zf.\sin.(E+D) - eg.\sin.(E+F) + zg.\sin.(D+E+F)) : 2 = 14195{,}5.$$

Da letzteres $\frac{9}{8}$ von ersterem sein muß, so vermehre man den Inhalt des ersteren um $\frac{1}{8}$ und man erhält 14190,5, was als ein Beweis anzusehen ist, daß die ganzen Rechnungsoperationen richtig durchgeführt sind.

Will man auch noch den Winkel bei H und die Länge der neuen Grenzlinie GH berechnen, so wird dieses wohl am zweckmäßigsten auf die im §. 7. II. Fall gelehrte Art, nämlich dadurch geschehen, daß man die Linie AH als Achse annimmt, die Azimuthe und Coordinaten bis zum Punkte G berechnet und dann

$$\text{tang. } \alpha = \frac{y}{x} \text{ und } GH = \frac{y}{\sin \alpha}$$

ermitttelt.

Da das einzuhaltende Verfahren schon aus den sub 1 und 2 vorgetragenen Fällen bekannt ist, so will ich die Ausführung dem Leser überlassen und nur die Resultate, welche man erhalten wird, hier beisetzen.

Es wird sich ergeben y von $G = -422{,}0$; x von $G = -36{,}8$. Da wir nun $AH = \omega = 77{,}2$ gefunden haben, so wird

$$\text{tang. } \alpha = \frac{422{,}0}{77{,}2 + 36{,}8} = \frac{422{,}0}{114{,}0} = 74°,53' \text{ und } GH = 437{,}1.$$

Fig.34. Es unterliegt keinem Zweifel, daß das Verfahren der Grenzabſtreckung bei ungleicher Bodengüte weitläuftig und mühſam iſt und deßhalb zu wünſchen, daß ein einfacheres Verfahren aufgefunden werden möge, was mir bis jetzt nicht hat gelingen wollen *).

Setzt man in der Hauptgleichung für ω die Bonitäten gleich, ſonach $m = n$, ſo wird $P = 332{,}346 - 84{,}678 + 406{,}840 = = + 654{,}508$; $\frac{1}{2}P = + 327{,}254$; $\frac{1}{4}P^2 = 107095{,}18$ . . $Q = + 28130{,}630 + 34435{,}77 = 62566{,}40$ und es wird $\sqrt{Q + \frac{1}{4}P^2} - \frac{1}{2}P = \sqrt{16966158} - 327{,}254 = 411{,}9 - - 327{,}3 = 84{,}6$.

Ganz daſſelbe Reſultat erhält man, wenn die vorliegende Aufgabe für gleiche Bodenwerthe nach 2) behandelt wird.

Wir haben uns nunmehr noch mit Anfertigung des Grenzvermeſſungs-Regiſters zu beſchäftigen, und wollen hierbei die ſo
Fig.35. a. b. c. ziemlich alle vorkommenden Fälle enthaltende Fig. 35. a. b u. c. zum Grunde legen.

Bei Vollziehung dieſer Arbeit kommt es zunächſt darauf an, die durch die von den Hauptlinien gefällten Perpendikel gebildeten Trapezien und Dreiecke in lauter rechtwinkelichte Dreiecke zu zerlegen, was ganz einfach dadurch geſchieht, daß man ſich vom Endpunkte der kürzeren Ordinate nach der vorhergehenden oder folgenden eine mit der Stationslinie parallel laufende Linie gezogen denkt oder wirklich ziehet, und nun in den rechtwinklichten Dreiecken die beiden ſpitzen Winkel und die Hypothenuſe, als Grenzlinie, berechnet, was in Beziehung auf den der Ordinate gegenüberſtehenden Winkel ganz einfach durch die Formel $\text{tang. } \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ und $\text{Grenzlinie} = \frac{\Delta y}{\sin. \alpha}$ geſchiehet.

Die Berechnung ſelbſt iſt keineswegs ſchwierig, wohl aber bei mehreren tauſend Grenzpunkten langweilig, und erfordert ſtets peinliche Achtſamkeit, damit die beiden ſpitzen Winkel, welche wir α und β heißen wollen, nicht verwechſelt werden. Wir haben in

*) vid. Nachtrag II.

praxi gefunden, daß man zweckmäßig ſtets den der Ordinate ge- Fig.35. a. b. c.
genüberſtehenden Winkel mit α bezeichnet, ſonach ſtets die Ordinaten-differenz durch die Abſciſſendifferenz zu dividiren hat, um die Tangente von α zu finden. Geſchiehet dieſes conſequent und haben wir in dieſer Rechnung erſt einige Uebung und Fertigkeit erlangt, ſo brauchen wir die Dreiecke ſelbſt nicht mehr näher zu bezeichnen und können den richtigen Grenzwinkel auf den erſten Blick zuſammenſetzen. Wir wollen ſehen, ob und was Geſetzmäßiges aufzufinden iſt und deßhalb die Figur vom Stein 1 anfangend bis zum Stein 24 einzeln nach den Grenzwinkeln durchgehen. Grenzwinkel bei Stein 1 kann nicht berechnet werden, ohne den vorhergehenden Theil der Figur zu kennen:

Gzw. 2. $= 90^0 +$ vorh. $\alpha + \beta$
Gzw. 3. $= 180^0 +$ vorh. $\alpha + \alpha$
Gzw. 4. $=$ vorh. $\beta + \beta$
Gzw. 5. $= 180 + \alpha' + \alpha$ (vorh. $\alpha = \alpha'$ geſetzt)
Gzw. 6. $= \beta' + \beta$
Gzw. 7. $= 180 + \alpha' + \alpha$
Gzw. 8. $=$ Poly. W. $- (\alpha' + \alpha)$ *)
Gzw. 9. $= 180 + \alpha' + \alpha$
Gzw. 10. $= \beta' + \beta$
Gzw. 11. $=$ Poly. W. $+ \alpha' + \alpha$
Gzw. 12. $= \beta' + 90 + \alpha$
Gzw. 13. $=$ Poly. W. $- (\alpha' + \alpha)$

*) Um den Grenzwinkel bei Stein 8 richtig abzuleiten, haben wir die Fig. 36. beigegeben. Ziehen wir die punktirten 8e, 8f und 8 St., verlängern auch das Perpendikel a8 rückwärts nach b und das Perpendikel 8c nach d ſo erhalten wir Gzw. $8 = \beta' + \beta - \sphericalangle$ d8b. Dieſer $\sphericalangle$ d8b $= \beta'' - \beta'''$ in den Dreiecken a8 St. und c8 St., ſonach Gzw. $8 = \beta' + \beta - (\beta'' - \beta''') = \beta + \beta' + \beta''' - \beta''$. Um die Winkel β'' und β''', gar nicht berechnen zu brauchen, führe man den gemeſſenen Polygonwinkel bei St. in die Rechnung ein und bedenke, daß $\sphericalangle$ e8f $=$ dieſem Polygw. iſt, weil e8 und 8f mit den Polygonſeiten parallel laufen; von dieſem Winkel ſind nach Lage der Figur vorh. α und α abzuziehen um den Grenzwinkel 7, 8, 9 zu erhalten.

Fig. 35. a. b. c.

Gzw. 14. $= 180 + \alpha' + \alpha$
Gzw. 15. $= \alpha + 90 + \beta'$
Gzw. 16. $=$ Poly. W. $+ \alpha - \alpha'$
Gzw. 17. $= \beta' + \beta$
Gzw. 18. $= \alpha' + 90 + \beta$
Gzw. 19. $= 180 + \alpha' + 90 + \beta = 3$ R. $+ \alpha' + \beta$
Gzw. 20. $= \alpha' + \alpha$
Gzw. 21. $= \beta' + 90 + \alpha$
Gzw. 22. $= \beta' + \beta$
Gzw. 23. $=$ Poly. W. $+ \alpha' - \alpha$.

Wir ersehen hieraus unzweifelhaft folgendes:

1) Ist y bei dem zu berechnenden Grenzwinkel größer als vorhergehend und folgend y, so bestehet der Grenzwinkel aus 2R + den beiden α, sonach $180 + \alpha' + \alpha$.

2) Ist y kleiner als vorhergehend und folgend y, so bestehet der Grenzwinkel aus den beiden β, sonach $\beta' + \beta$.

3) Ist y größer als vorhergehend, aber kleiner als folgend y, so bestehet der Grenzwinkel aus $1R + \alpha' + \beta$ oder aus $1R + \beta' + \alpha$ je nachdem vorhergehend y kleiner oder größer als y ist.

4) Wo 2 Perpendikel von 2 Hülfslinien oder Polygonseiten auf einen Grenzpunkt gefällt oder berechnet sind, sind die beiden α vom Polygonwinkel abzuziehen, wenn vorhergehend und folgend y größer wird, dagegen zu addiren, wenn der umgekehrte Fall eintritt. Ist vorhergehend y $\lessgtr$ als y und folgend y oder umgekehrt, so wird ein α abgezogen, das andere addirt.

5) Wenn $\triangle x$ negativ wird, wie bei dem Stein 20, so bestehet Gzw. 19 aus $3R + \alpha' + \beta$ oder auch $= 3R + \beta' + \alpha$ je nachdem vorhergehend $y >$ oder $<$ als y ist. Der nächst folgende Grenzwinkel bestehet aus $\alpha' + \alpha$.

6) Fallen die Perpendikel unterhalb die Stationslinie, mit andereren Worten, werden dieselben negativ, so verändern sich die Zeichen für α und β.

Wir wollen nunmehr noch die Grenzroute von Stein 1 bis Stein 8 speciell berechnen.

Fig. 35. a. b. c.

St. 1.	St. 2.
tang. $\alpha = \frac{605}{875} = 2{,}78176$ *)	tang. $\alpha = \frac{545}{1075} = 2{,}73640$
$2{,}94201$	$3{,}02141$
$9{,}83975$	$9{,}71499$
$\alpha = 34°, 40'$	$\alpha = 27°, 25'$
$\beta = 55°, 20'$	$\beta = 52°, 35'$
Gzl. $= \frac{605}{\sin.\ \alpha} = 2{,}78176$	Gzl. $= \frac{545}{\sin.\ \alpha} = 2{,}73640$
$9{,}75496$	$9{,}66295$
$3{,}02680$	$3{,}07345$
1064	1184
Gzw. =	Gzw. = $90 + \alpha' + \beta$
	$34 - 40$
	$52 - 35$
	$177°\ 15'$

St. 3.	St. 4.
tang. $\alpha = \frac{1700}{400} = 3{,}23054$	tang. $\alpha = \frac{1400}{1050} = 3{,}14613$
$2{,}60206$	$3{,}02119$
$10{,}62848$	$10{,}12494$
$\alpha = 76°, 46'$	$\alpha = 53°, 08'$
$\beta = 13°, 14'$	$\beta = 36°, 52'$
Gzl. $= \frac{1700}{\sin.\ \alpha} = 3{,}23054$	Gzl. $= \frac{1400}{\sin.\ \alpha} = 3{,}14613$
$9{,}98831$	$9{,}90311$
$3{,}24223$	$3{,}24302$
1751	1750
Gzw. = $180 + \alpha' + \alpha$	Gzw. = $\beta' + \beta'$
$27 - 25$	$13°\ 14'$
$76 - 46$	$36 - 52$
$284°, 11'$	$50°, 06'$

*) Zur Berechnung der Grenzwinkel und Grenzlinien genügen kleine Logarithmen-Tafeln mit 5 Decimalstellen. Durch deren Anwendung wird die Rechnung sehr abgekürzt. Die Rechnungsvortheile ergeben sich durch die wirkliche Ausführung.

Fig. 35. a. b. c.

St. 5.	St. 6.
tang. α $\frac{500}{1050}$ = 2,69897 3,02119 9,67778 $\alpha = 25°, 28'$ $\beta = 64°, 32'$	tang. α = $\frac{875}{800}$ = 2,94201 2,90309 10,03892 $\alpha = 47°, 34'$ $\beta = 42°, 26'$
Gzl. = $\frac{500}{\sin. \alpha}$ = 2,69897 9,63345 3,06552 1163	Gzl. = $\frac{875}{\sin. \alpha}$ = 2,94201 9,86809 3,07392 1185
Gzw. = $180 + \alpha' + \alpha$ 53°, 08' 25°, 28' 258°, 36'	Gzw. = $\beta' + \beta$ 64°, 32' 42°, 26' 106°, 58'

St. 7.	St. 8.
tang. α — $\frac{825}{1000}$ = 2,91645 3, — 9,91645 $\alpha = 39°, 31'$ $\beta = 50°, 29'$	tang. α = $\frac{200}{1900}$ = 2,30103 3,27875 9,02228 $\alpha = 06°, 01'$ $\beta = 83°, 59'$
Gzl. = $\frac{825}{\sin. \alpha}$ = 2,91645 9,80366 3,11279 1297	Gzl. = $\frac{200}{\sin. \alpha}$ = 2,30103 9,02043 3,28060 1908
Gzw. = $180 + \alpha' + \alpha$ 47—34 39—31 267°, 05'	Poly. W. $= \alpha' - \alpha$ = 149° = 45°, 32' 103°, 28'

§. 12.

Von den Höhenmessungen.

I. Es wird hier vorzugsweise von Messung der Baum- und Berghöhen, als denjenigen Gegenständen, welche den Forstmann hauptsächlich interessiren, gehandelt, weiterhin jedoch auch das

Nöthige behufs Anlegung von Kunststraßen, Tunnels bei Eisenbahnen ꝛc. vorgetragen werden. Fig. 35. a. b. c.

Bei den Höhenmessungen wird meist nur die relative Höhe zweier oder mehrerer Orte über einander, sonach nur die Höhenunterschiede dieser Orte, seltener die Höhe über der Meeresfläche verlangt, obgleich auch diese, namentlich bei barometrischen Höhenmessungen nicht ausgeschlossen ist.

Wir unterstellen bei unseren nachfolgenden Betrachtungen, daß man sich zur Messung der nöthigen Winkel eines mit einem Höhenkreis versehenen und richtig eingetheilten Theodolithen als desjenigen Instrumentes bediene, womit Horizontal- und Verticalwinkel mit großer Leichtigkeit und Sicherheit gemessen werden können.

Die Theorie der Höhenmessung beschränkt sich eigentlich auf folgenden Fall:

Es sei AB, Fig. 37, eine geneigte Linie, von deren Endpunkten man den Höhenpunkt E sehen kann. Es soll die Höhe des Punktes E über B oder A ermittelt, auch dessen Lage bestimmt werden. Fig. 37.

Man messe zunächst in B den Elevationswinkel $A'BA = \alpha$, sodann den Vertikalwinkel $EBE = \beta$ und den Horizontalwinkel $ABC = b$ in A messe man den Horizontalwinkel $CA'B = a$, sodann zur Controle den Depressionswinkel BAA' und den Vertikalwinkel $EAD = \gamma$.

Aus diesen Daten erhält man zunächst in dem Horizontaldreieck $A'BC$ die Seite

$$A'C = \frac{A'B.\ \sin.\ b}{\sin.\ (a+b)} \text{ und } BC = \frac{A'B.\ \sin.\ a}{\sin.\ (a+b)}.$$

Hierdurch wird die Lage des Punktes C gegen den Punkt A' und B in der horizontalen Projektion gefunden.

Durch die gemessenen Vertikalwinkel ist es nun leicht die Höhenunterschiede der Punkte A, B und E zu finden *). Es ist zunächst

*) Man muß sich vom Punkt E ein Perpendikel auf die Horizontalprojektion gefällt denken, alsdann ist EC die Höhe des Punktes E über AB und bei C und D sind rechte Winkel.

Fig 37. $A'A = A'B.\ \text{tang.}\ \alpha - EC = BC\ \text{tang.}\ \beta - DE = AD.\ \text{tang.}\ \gamma = A'C.\ \text{tang.}\ \gamma.$

Setzt man nun für $A'B = c$ und für $A'C$ und BC ihre Werthe, so erhält man

1) $AA' = c.\ \text{tang.}\ \alpha.$

2) $CE = \frac{c.\ \text{sin.}\ a.}{\text{sin.}\ a + b}\ \text{tang.}\ \beta.$

3) $DE = \frac{c.\ \text{sin.}\ b.}{\text{sin.}\ (a+b)}\ \text{tang.}\ \gamma.$

Da $AA' + DE = CE$ so ist auch

$$c.\ \text{tang.}\ \alpha + \frac{c.\ \text{sin.}\ b.\ \text{tang.}\ \gamma}{\text{sin.}\ (a+b)} = \frac{c.\ \text{sin.}\ a.\ \text{tang.}\ \beta}{\text{sin.}\ (a+b}$$

und wenn man mit c dividirt und den Nenner wegschafft

$$\text{sin.}\ (a+b).\ \text{tang.}\ \alpha + \text{sin.}\ b.\ \text{tang.}\ \gamma = \text{sin.}\ a.\ \text{tang.}\ \beta.$$

Es dient dieses zur Prüfung der gemessenen Winkel.

Wir wollen uns nun denken es sei die horizontale Entfernung von A' nach $B = c$, sowie auch die Höhe des Punktes A über der Horizontalebene bekannt; der Beobachter befinde sich auf der Kuppe des Berges E und wolle von *hier aus* die nöthigen Messungen zur Ermittelung der Höhe CE und DE über der Horizontalprojektion vornehmen. Man messe die beiden Vertikalwinkel $AEC = \alpha$ und $BEC = \beta$ oder auch deren Ergänzungen zu $180°$, d. h. den Zenithwinkel, sowie den Horizontalwinkel $BCA' = \gamma$, unter welchen die durch EA und EB gelegten Vertikalebenen sich schneiden, so ist weil die Winkel bei D und C rechte sind:

$$AD = A'C = ED.\ \text{tang.}\ \alpha$$
$$BC = (A'A + ED.)\ \text{tang.}\ \beta.$$

Daher ist

$$A'B^2 = A'C^2 + BC^2 - 2CB.\ A'C.\ \cos.\ \gamma =$$
$$= ED^2.\ \text{tang.}\ \alpha^2 + (A'A + ED)^2.\ \text{tang.}\ \beta^2 -$$
$$- 2\ (A'A + ED + ED^2).\ \text{tang.}\ \alpha.\ \text{tang.}\ \beta.\ \cos.\ \gamma$$
$$= ED^2\ (\text{tang.}\ \alpha^2 + \text{tang.}\ \beta^2 - 2.\ \text{tang.}\ \alpha.\ \text{tang.}\ \beta.\ \cos.\ \gamma)$$
$$+ ED\ (2AA'.\ \text{tang.}\ \beta^2 - 2AA'.\ \text{tang.}\ \alpha.\ \text{tang.}\ \beta.\ \cos.\ \gamma)$$
$$+ AA'^2.\ \text{tang.}\ \beta^2.$$

Man setze die mit ED^2 multiplicirte Größe $= P$, die mit Fig. 37.
ED multiplicirte $= Q$ und den Ausdruck $AA'^2 . \text{tang. } \beta^2 = R$, so wird $A'B^2 = ED^2 . P + ED . Q + R$, und aus dieser unreinen quadratischen Gleichung erhalten wir schließlich

$$ED = -\frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + (A'B^2 - R)\,4P}}{2P}$$

Hierdurch ist die Höhe ED und sonach auch EC, freilich in einem sehr mühsam zu berechnenden Ausdrucke gegeben. Viel einfacher wird die Gleichung, wenn die Linie AB eine horizontale, sonach $AA' = 0$, folglich auch Q und $R = 0$ sind. In diesem Falle ist $EC = A'B \sqrt{\frac{1}{P}}$. Für P seinen oben angenommenen Werth substituirt giebt:

$$EC = A'B \sqrt{\frac{1}{\text{tang. } \alpha^2 + \text{tang. } \beta^2 - 2 . \text{tang. } \alpha . \text{tang. } \beta . \cos . \gamma}}$$

Man dividire im Zähler und Nenner mit tang. α. tang. β und kehre die Nenner um, so wird

$$EC = A'B \sqrt{\frac{\text{cotang. } \alpha . \text{ cotang. } \beta}{\frac{\text{cotang. } \beta}{\text{cotang. } \alpha} + \frac{\text{cotang. } \alpha}{\text{cotang. } \beta} - 2 . \cos . \gamma}}$$

Wir wollen hiernach ein Beispiel berechnen.

Es sei $A'B = c = 3015'$; $\alpha = 85°, 58' 06''$; $\beta = 86°, 06' 55''$; $\gamma = 49°, 34'$.

$$\log . \text{ cotang. } \alpha = 8{,}8480796$$
$$\log . \text{ cotang. } \beta = 8{,}8319035$$
$$7{,}6799831 - 10$$

$$\log . \frac{\text{cotang. } \alpha}{\text{cotang. } \beta} = 0{,}0161761 \quad = \log . \ 1{,}03795$$

$$\log . \frac{\text{cotang. } \beta}{\text{cotang. } \alpha} = 0{,}9838239 - 1 = \log . \ 0{,}96343$$

$$\text{Sma.} = \ldots \ 2{,}00138$$
$$2 . \cos . \gamma = \ldots \ 1{,}2971256$$
$$\text{Diff.} = \ldots \ 0{,}7042544$$

Fig. 37

log. 0,7042544 . . . . = 0,8477293 — 1
Von log. cotang. α. cotang. β = 7,6799831 — 10 abgezogen
bleibt . . . . . = 7,8322538

dieſes kann auch geſchrieben werden

1,8322538 — 4 : 2 = 0,9161269 — 2
log. c = log. 3015 = 3,4792873
2,3954142
= log. 248,55,

ſonach CE = 248,55.

Aus dieſer Höhe CE laßen ſich nun auch die Linien

AD = A'C = EC. tang. α und BC = (AA' + ED). tang. β

finden.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß die Beſtimmung von horizontalen Entfernungen aus gemeſſenen Höhen viel unſicherer und zeitraubender iſt, als deren Berechnung aus horizontalen Linien und Winkeln, allein es können in praxi Fälle vorkommen, wo man ſich des Verfahrens aus gemeſſenen Berghöhen, Horizontallinien abzuleiten, bedienen muß, und deßhalb muß man daſſelbe kennen, wenn man nicht in Verlegenheit kommen will.

Wir wollen nun noch den Fall behandeln, wo die Höhe zweier Berge und die horizontale Entfernung ihrer Spitzen D und E,
Fig. 38. Fig. 38, mit Hülfe einer Standlinie AB ermittelt werden ſoll, die zwar horizontal, aber nicht in einer Ebene mit den beiden Berghöhen liegt.

Durch die Standlinie AB denke man ſich eine Horizontalebene gelegt und auf dieſe Perpendikel von den beiden Bergſpitzen gefällt, wie CD und EF, ſo bezeichnet CD die Höhe des Berges D und EF die Höhe des Berges E über der Horizontalebene ABCF. — CF aber bezeichnet die horizontale Entfernung, DE die wirkliche Entfernung der Bergſpitzen.

Man ſtelle den Theodolithen in A horizontal auf und meſſe daſelbſt die beiden Horizontalwinkel CAF und CAB, ſowie den Höhenwinkel CAD. Auf Station B meſſe man die beiden Horizontalwinkel ABF, ABC, ſowie den Höhenwinkel FBE.

In den beiden horizontalen Dreiecken ACB und ABF sind die Fig.38.
Grundlinien und die an derselben liegenden Winkel bekannt, weßhalb sich hieraus die Seiten AC und BF mit Leichtigkeit berechnen lassen. Diese beiden Seiten mit den correspondirenden Höhenwinkels-Tangenten multiplicirt, giebt die Berghöhen DC und EF.

Die Horizontalentfernung CF ergiebt sich aus dem Dreieck CAF sowohl als aus den Dreieck CBF. In jedem derselben sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, woraus die dritte Seite gefunden werden kann.

Wollte man den directen Abstand beider Bergspitzen finden, so denke man sich von der Spitze des niedrigeren Berges E eine Parallele EG mit CF gezogen, so entsteht ein rechtwinklichtes Dreieck DGE worin die beiden Catheten nämlich EG oder die horizontale Entfernung und DG oder der Unterschied der beiden Berghöhen bekannt sind, daher die Hypothenuse DF leicht gefunden werden kann.

Bei der bis hierher vorgetragenen Art des Höhenmessens ist auf verschiedene Umstände Rücksicht zu nehmen und einige Fehler-Correktionen anzubringen.

1) Da bei den Höhenmessungen stets nur feste Punkte berücksichtigt werden, so muß auch stets nach diesen hinvisiret, dieselben also stets in gleicher Höhe pointiret werden. Wo man den Fuß der Objekte nicht sehen kann, muß man ein Signal errichten, was eine sichtbare Bezeichnung in einer bestimmten Höhe hat. Wird diese Höhe der des Instrumentes — sonach $4-4\frac{1}{2}$ Fuß — gleich gewonnen, so erspart man dadurch die Correktion wegen der Höhe des Instrumentes.

Wird von einem tiefer gelegenen Punkte nach einem höher gelegenen Fußpunkte visirt, so wird der Elevationswinkel zu klein gemessen und man muß in dieſem Falle, der berechneten Höhe, die des Instrumentes noch beizählen.

Wird von einem höher gelegenen Punkte nach einem tiefer liegenden Fußpunkte visirt, so wird der Depressionswinkel zu groß gemessen und es muß in dieſem Falle, die Höhe des In-

Fig.39. strumentes von der berechneten Höhe des Gegenstandes abgezogen werden.

Wird dagegen nach einem Signal visirt, welches in gleicher Höhe des Instrumentes pointirt wird; so läuft die Visirlinie mit den Fußpunkten der Station und des zu messenden Gegenstandes parallel und es werden die Erhebungs- und Vertiefungswinkel — Abstände von dem Zenith — richtig gemessen und Correktionen wegen des Instrumentes überflüssig.

Durch eine kleine Zeichnung kann man sich von der Richtigkeit dieser Sätze leicht überzeugen, doch wird weiter unten auch noch der specielle Beweis und das Verfahren bei Berechnung der Höhen und Tiefenwinkel vorgetragen werden.

2) Sollte das Instrument keine genaue horizontale Stellung haben, oder diese wegen der Dosenlibelle des Theodolithen nicht genau gegeben werden können, so entsteht bei Messung der Vertikalwinkel und bei Berechnung der Höhen ein Fehler, welcher folgendermaßen beurtheilt werden kann:

Angenommen die Höhe eines Gegenstandes sei 1000 Fuß, so beträgt der Umfang des ganzen Kreises $= 2.3,14..1000 = 6280'$. Jeder der 360 Grade des Kreises beträgt $\frac{6280}{360} = 17,5'$ und jede Minute $= \frac{17,5}{60} = 0,29$ Fuß oder nächst 3 Zoll.

Da nun eine gute Libelle eine Abweichung von 1' von der Horizontalebene anzeigt, so ergiebt sich, daß dieser Fehler bei möglichst genauer horizontaler Stellung des Instrumentes nicht weiter beachtet zu werden braucht.

3) Bekanntlich ist eine durch einen Punkt unserer Erde geführte horizontale Fläche keine Ebene, sondern ein sehr kleiner Theil des Bogens unserer Erdkugel, deren mittlerer Durchmesser = 39,264240 Pariser oder 40'638615 Preußische Fuß beträgt.

Da nun unsere Höhenmeßinstrumente die Erhebungswinkel nur über der scheinbaren Horizontallinie angeben, so müssen die gemessenen Elevationswinkel, um die Erhebung der scheinbaren

Horizontallinie über die wahre vergrößert werden, welche von der Fig.38.
Entfernung der Objekte folgendermaßen abhängt:

Es sei B ein Punkt der Erdoberfläche von wo aus der Er- Fig.39.
hebungswinkel des Gegenstandes E nämlich EBC gemessen worden ist. Statt dieses Winkels hätte der Winkel EBc gemessen werden müssen, weil cE die wahre Höhe; CE die Höhe des Gegenstandes über der scheinbaren Horizontallinie BC ist. Die Höhe wird also um Cc zu klein angegeben und dieser Theil wird folgendermaßen gefunden.

Da die Linie BC als Tangente an den Punkt B anzusehen, so ist dieselbe nach einem bekannten geometrischen Lehrsatz die mittelere Proportionallinie zwischen Cc und Cc + den Erddurchmesser, also $BC^2 = Cc \times (cC + 2R)$.

Da nun cC gegen 2R sehr klein und in den vorliegenden Fällen, als verschwindend klein angenommen werden kann, so wird

$$BC^2 = Cc \times 2R \text{ und } Cc = \frac{BC^2}{2R}.$$

Die Erhöhung des scheinbaren Horizontes über dem wahren stehet im quadratischen Verhältniß der Entfernungen. Da nun 2R oder D = 40,638615 Pr. Fuß, so beträgt die Correktion für eine Standlinie von 100° oder 1000 Fuß der Erhebungswinkel CBc = 5,07″ und die Erhebung Cc = 0,025′; bei doppelter Entfernung beträgt der Erhebungswinkel das Doppelte, die Höhe selbst aber das Vierfache der oben berechneten Correktion *)

4) Die Erfahrung lehrt, daß der Lichtstrahl, sobald derselbe die Athmosphäre der Erde erreicht bei seinem Durchgange durch die dünneren in die allmählich dichter werdenden Luftschichten von seiner geraden Linie abweicht — gebrochen wird — und daß seine Bahn eine gegen die Erde hin hohle krumme Linie ist. Diese krumme

*) In G. G. Schmidt's logarithmischen, trigonometrischen und anderen Tafeln. Gießen bei Heyer sind die Erhebungswinkel der scheinbaren Horizontallinie über die Sehne des Bogens für altfranzösisches nnd rheinländisches Maß berechnet und auch eine Tafel über die mittlere Strahlenbrechung beigefügt.

Fig. 39. Linie liegt in einer Vertikalebene und fällt nach den neuesten Ermittelungen der Astronomen sehr nahe mit dem Bogen eines Kreises zusammen dessen Durchmesser dem 6fachen Erddurchmesser gleich ist. Unser Auge siehet das Objekt nach derselben Richtung wie der Strahl zuletzt in dasselbe kam und setzt sonach den Gegenstand E, Fig. 39, nach A, wodurch die Höhe des Gegenstandes E um AE vergrößert wird.

Um für diese Vergrößerung eine Correktion zu finden, haben wir zu bedenken, daß AB als die Tangente eines Kreises angesehen werden kann, dessen Durchmesser $= 6.2R$ ist; wir finden also wie in 3) $AE = \frac{a^2}{6.2.r}$, indem wir auch hier ohne merklichen Irrthum $AB = AC$ setzen können, indem bei bedeutenderen Entfernungen der Höhenwinkel meist sehr klein ist.

Aus der, nach den vorhergehenden Anleitungen berechneten Höhe AC, leiten wir die wahre Höhe Ec her, indem wir bemerken, daß

$$Ec = AC + Cc - AE = AC + \frac{a^2}{2R} - \frac{a^2}{6.2R}^{*)} = AC + \frac{5}{6}\cdot\frac{a^2}{2R}.$$

Beispiel. Die horizontale Entfernung des Bogens sei 31784 rheinländische Fuß $=$ 5115 Toisen; der Erhebungswinkel 1° 51′ 18″, so ist die uncorrigirte Höhe $= 31784.$ tang. 1° 51′ 18″

log. . . . 31784 $= 4{,}5022086$

log. tang. 1°51′18″ $= 8{,}5103730$

$3{,}0125816 =$ log. 1029,4′

Die anzubringende Verbesserung beträgt:

$\frac{5}{6}\cdot\frac{31784^2}{40638615} = 21$ Fuß also die berichtigte Höhe

$= 1029{,}4 + 21{,}0 = 1050{,}4$ Fuß.

Nach den vorhin erwähnten Tafeln von Schmidt beträgt die Verbesserung für den Erhebungswinkel der scheinbaren Horizontal-

*) Manche Schriftsteller nehmen die Refraktion zu $\frac{1}{7}$ der Differenz zwischen dem wahren und scheinbaren Horizont an.

linie 161″ oder 2′ 41″ und die Verbesserung für die Strahlen- Fig. 39.
brechung bei 1° 15′ Elevation = — 33,95″, daher der verbesserte
Erhebungswinkel = 1°51′18″
+ 2′41″
— 34″
= 1°53′25″

Hieraus berechnet sich die corrigirte Höhe zu 1049 rh. Fußen.

II. Bei Höhenmessungen behufs Anlegung von Straßen, Eisenbahntunnels, Correktionen des Laufes der Flüsse, Anlage von Kunstwiesen, Drainageanlagen ꝛc. wird die relative Erhebung eines Ortes über dem anderen meist durch viele Zwischenstationen, sonach allmählig stückweise gefunden, wobei mancherlei zu berücksichtigen ist, was wir bis jetzt noch nicht gelehrt haben, weßhalb wir uns hierüber noch besonders auslassen müssen.

Zur Vermeidung von Irrthümern ist es empfehlenswerth auf jeder Station nicht bloß den Vertikalwinkel nach der neuen Station, sondern auch den nach der vorhergehenden zu messen, weil sich dann Höhen- und Tiefelwinkel zu Anfang und zu Ende einer Station gemessen, gleich sein müssen.

Außerdem ist es räthlich jeden Höhen- und Tiefenwinkel in jeder Lage des Fernrohrs wenigstens einmal zu messen, damit etwaige Fehler in der Theilung, sowie die in der Excentricität des des Höhenkreises liegende Fehler aufgehoben werden*). Um dieses

*) Wir setzen voraus, daß der sog. Collimationsfehler, welcher dadurch entstehet, daß der horizontale Faden im Fernrohr nicht genau in der Mitte desselben stehet, oder mit andern Worten, daß der Horizontalfaden nicht in der optischen Achse des Fernrohres liegt, bereits vor dem Beginn der Vermessung corrigirt worden ist, was durch sanfte Verschiebung des Fadenkreuzes in vertikaler Richtung geschiehet. Angehende Geometer, welche hierin noch keine Uebung haben, lassen sich alle am Theodolithen zu bewirkende Correktionen am besten von dem Mechaniker oder einem älteren gewandten Geometer zeigen.

Zur gründlichen Kenntniß des Theodolithen und dessen zweckmäßigen Gebrauch zum fehlerfreien Messen von Horizontal- und Vertikalwinkeln

Fig. 39. zu bewirken, wird also nach dem festen Punkte unseres Signals visirt und dann der Höhenwinkel je nach der Anzahl der Nonien des Höhenkreises ein- oder zweimal abgelesen, das Fernrohr sodann um seine Axe durchgeführt und nun derselbe Winkel jetzt auf der linken Seite des Instrumentes gemessen, allwo dasselbe 2R — dem zu messenden Höhenwinkel betragen wird.

Es sind nämlich die Vertikalkreise an den neuern Theodolithen auf der rechten Seite der Visirlinie in der Art angebracht, daß sie sich mit dem Fernrohre auf und nieder bewegen und daß der fest stehende Nonius auf dem Nullpunkt des Höhenkreises einschneidet, wenn das Fernrohr eine horizontale Lage hat. Da nun die Theilung zuerst den unteren und dann den oberen Halbkreis durchläuft, so schneidet der Nonius den gemessenen Höhenwinkel nach Graden und Minuten ab, während derselbe bei Messung von Tiefenwinkeln die Ergänzung zu 4R abschneidet. Wird nun nach der ersten Beobachtung das Fernrohr um seine Axe durchgeführt und wieder nach dem Signal visirt, so steht der Höhenkreis jetzt auf der linken Seite des Instrumentes und es schneidet der Nonius bei Höhenwinkeln jetzt die Ergänzung zu 2R, bei Tiefenwinkeln dagegen denselben über 2R ab *).

Soll auf diese Art verfahren und nach den Fußpunkten der Signale visirt werden, so braucht man die Höhe des Instrumentes nicht zu beachten, denn es wird jetzt der Höhenwinkel um ebenso

---

sowie zum Nivelliren, reicht die ausführlichste Beschreibung nicht aus. Eine persönliche Anweisung durch einen gebildeten und erfahrenen Geometer bleibt die schnellste und sicherste Bekanntmachung und Einübung mit diesem herrlichen Instrumente.

*) Bei den älteren Theodolithen ist meist kein ganzer, sondern nur ein halber — unterer — Vertikalkreis angebracht, hier aber das Fernrohr zum Ausheben aus seiner Achse und zum Umkehren eingerichtet, weßhalb auch hier die Höhen und Tiefenwinkel auf der entgegengesetzten Seite des Limbus gemessen werden können. Die neuere Einrichtung ist vorzuziehen. Durch mündliche Anleitung zum Messen von Vertikalwinkeln wird das oben Gesagte deutlicher.

viel zu klein als der Tiefenwinkel zu groß gemessen und es wird Fig.39.
der richtige Elevationswinkel $a = \frac{\alpha + \beta}{2}$ wenn α und β die gemessenen Höhen- und Tiefenwinkel bezeichnet.

Die Fig. 40 wird dieses klarer machen. Fig.40.

Es sei AC die geneigte, AB die horizontale Standlinie, der Elevationswinkel $= a$. Durch CD und AE wird die Höhe des Instrumentes als gleich hoch, bezeichnet.

Von E aus wird der Erhebungswinkel α und von D aus der Tiefenwinkel β gemessen.

Nun ist $\beta = a + b'$; $\alpha = 90 - b - b'$; $b = 90 - a$

folgl. $\alpha = a - b'$, sonach $\alpha + \beta = 2a$ und $\frac{\alpha + \beta}{2} = a$.

Zur Vermeidung der Einflüsse der Erdkrümmung und der irrdischen Refraktion ist es bei genaueren Höhenmessungen stets gerathen die Elevations- und Depressionswinkel von der Mitte der Station aus zu messen, weil sich dann die Fehler erzeugenden Einflüsse compensiren.

Das Verfahren hierbei ist einfach folgendes:

Es sei Fig. 41 AC die Station, a der zu messende Elevations- Fig.41.
winkel. In D als der Mitte der Standlinie werde der Vertiefungswinkel α und der Erhebungswinkel β gemessen, so ist $\alpha = a + b'$. Wird die Visirlinie des Instrumentes rückwärts verlängert, sie ist $\alpha = \beta + \gamma$; γ aber ist $= 2b'$ weil das Dreieck ACE als gleichschenkelicht angesehen werden kann, γ aber ein Außenwinkel ist. Es ist sonach auch $\alpha = \beta + 2b'$ und $b' = \frac{\alpha - \beta}{2}$; setzt man diesen Werth in die erste Gleichung $\alpha = a + b'$ so wird $a = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Selbst für den Fall, wo man die Signale nicht unmittelbar über dem Boden sehen könnte, die Vertikalwinkel sonach für bestimmte gleiche Höhe der Signale *) messen müßte, ändert sich

*) Die beiden Signale können beliebig, doch müssen dieselben gleich lang sein.

Fig. 41. nichts an den Resultaten, denn während der Depressionswinkel α um den Winkel der Signalhöhe zu klein gemessen wird, wird der Elevationswinkel β um den gleichen Winkel zu groß gemessen und es ist der richtige Neigungswinkel a stets gleich $\frac{\alpha + \beta}{2}$.

Fig. 42. 1) Es sei nun A, Fig. 42, ein an dem Fuße eines Berges liegender Punkt, F ein an der entgegengesetzten Seite erhaben liegender. Man habe die Verbindungslinien AB, BC, CD, DE, EF und die von diesen Seiten eingeschlossenen Horizontalwinkel; endlich auch ihre Neigungswinkel gegen die Horizontalebene gemessen: man soll von A nach F durch den Berg schlagen und will die Abweichung der Linie AF von AB d. h. den Winkel FAB, sowie die Länge der Linie AF und die Neigung derselben gegen den Horizont, oder deren Steigen und Fallen wissen?

Auflösung. Man denke sich durch AB, welche als horizontal angenommen ist eine Horizontalebene gelegt und von allen Winkelpunkten der Figur, welche über der horinzontalen Ebenen erhaben oder vertieft liegen, Lothe auf die Horizontalebene gefällt. Denkt man sich ferner die Fußpunkte der Perpentikel durch gerade Linien verbunden, so erhält man den horizontalen Grundriß der erhaben liegenden Figur.

Da nun angenommen, daß die Linien BC, CD, DE und EF nach ihrer wahren Länge auf den schiefen Ebenen gemessen seien, so müssen dieselben mit Hülfe der gemessenen Elevationswinkel auf die Horizontalebene reducirt werden, wodurch sich zugleich die Erhebung des Punktes F über A ergiebt.

Es ist nämlich BC. sin. n = Cc = gleich der Höhe des Punktes C über B und BC. cos. n = Bc = der horizontalen Entfernung von B nach C. Wird auf diese Art bis zum Punkte F gerechnet, so erhält man durch die Summe aller Produkte der schief gemessenen Linien mit den Sinussen ihrer Neigungswinkel, durch die Linie Ff, die Höhe des Punktes F über A.

Nachdem man die horizontalen Entfernungen kennt, berechnet man sich die Azimuthe der Punkte B, C, D, E auf die als Achse

angenommene Linie AB und die Coordinaten der Punkte C, D, E u. F oder die Linien fg und Ag als Ordinate und Abſciſſe des Punktes F und hieraus die Tangente des Winkels gAf oder fAB und die Länge der Linie Af. Fig. 42.

Ein Beiſpiel wird das Verfahren noch beſſer erläutern.

AB = 800′		Elev.-Winkel bei B = n	
BC = 940′	Winkel B = 110°		= 15°
CD = 830′	„ C = 100°		n′ = 12°
DE = 512′	„ D = 280°		n″ = 20°
EF = 1200′	„ E = 70°		n‴ = 10°

Da AB als Achſe angenommen werden ſoll, ſo iſt

Polyg.-Winkel B = Az. sin. B	= 110°
Polyg. C	= 100°
	210°
ab . .	180°
Az. C.	= 30°
Polyg. W. D	= 280°
	310°
ab . .	180°
Az. D	= 130°
Polyg. W. E	= 70°
	200°
ab . .	180°
Az. E.	= 20°

Es iſt nunmehr zunächſt

log. BC = log. . 940	= 2,9731279	log. . 940	= 2,9731279
log. sin. n = log. sin. 15°	= 9,4129962	log. cos. 15°	= 9,9849438
	2,3861241		2,9580717
	= log. 243,3		= log. 908,0

Fig. 42.

log. CD	= log. 830	= 2,9190781	log. 830	=	2,9190781
log. sin. n'	= log. sin. 12°	= 9,3178789	log. cos. 12°	=	9,9904044
		2,2369570			2,9094825
		= log. 172,6			= log. 811,9
log. DE	= log. 512	= 2,7092700	log. 512	=	2,7092700
log. sin. n''	= log. sin. 20°	= 9,5340517	log. cos. 20°	=	9,9729858
		2,2433217			2,6822558
		= log. 175,1			= log. 481,1
log. EF	= log. 1200	= 3,0791812	log. 1200	=	3,0791812
lg. sin. n'''	= log. sin. 10°	= 9,2396702	log. cos. 10°	=	9,9933515
		2,3188514			3,0725327
		= log. 208,4		= log.	+ 1182,0.

log. Bc	= log. 908,0	= 2,9580717	log. 908,0	=	2,9580717
log. sin. . . .	110°	= 9,9729858	lg. cos. 110°	=	9,5340517
		2,9310575			2,4921234
		+ 853,2			− 310,5
log. Cx	= log. 811,9	= 2,9094825	log. 811,9	=	2,9094825
log. sin. . . .	30°	= 9,6989700	lg. cos. 30°	=	9,9375306
		2,6084525			2,8470131
		+ 405,9			+ 703,1
log. Dy	= log. 481,1	= 2,6822558	log. 481,1	=	2,6822558
log. sin. . . .	130°	= 9,8842540	lg. cs. 130°	=	9,8080675
		2,5665098			2,4903233
		+ 368,6			− 309,3
log. Ez	= lg. 1182,0	= 3,0726175	lg. 1182,0	=	3,0726175
log. sin. . . .	20°	= 9,5340517	lg. cos. 20°	=	9,9729858
		2,6066692			3,0456033
		+ 404,3			+ 1111,0

Es ist sonach Fig. 42.

$Ff =$	$fg =$	$Ag =$
$+ 243{,}3$	$+ 853{,}2$	$+ 703{,}1$
$+ 172{,}6$	$+ 405{,}9$	$+ 1111{,}1$
$+ 175{,}1$	$+ 368{,}6$	$+ 1814{,}2$
$+ 208{,}4$	$+ 404{,}3$	$- 310{,}5$
$+ 799{,}4$	$+ 2032{,}0$	$- 309{,}3$
		$- 619{,}8$
		$+ 1194{,}4$
		$- AB - 800{,}0$
		$+ 394{,}4$

$$\text{tang. } gAf = \frac{2032{,}0}{394{,}4}$$

$$\log. 2032{,}0 = 3{,}3079237$$

$$\log. 394{,}4 = 2{,}5959369$$

$$10{,}7119868 =$$

$$= \log. \text{tang}. \ldots 79°01'$$

$$< fAB = \ldots 100°59'$$

$$Af = \frac{fg}{\sin. 79°01'}$$

$$\log. \ldots 2032 = 3{,}3079237$$

$$\log. \sin. 79°01' = 9{,}9919711$$

$$3{,}3159526 = \log. 2070$$

$$\text{tang. } fAF = \frac{Ff}{Af}$$

$$\log. 799{,}4 = \ldots 2{,}9027641$$

$$\log. 2070 = \ldots 3{,}3159526$$

$$9{,}5868115$$

$$= \log. \text{tang}. 21°07'$$

Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß es nicht gerade nöthig war, die horizontalen Bc, Cx u. s. w. zu berechnen, denn man konnte die Ordinaten und Abscissen für die Punkte C, D, E, F doch finden.

Es war nämlich $Bc = BC \cos. n$; setzt man diesen Werth in die Gleichungen $\triangle y$ von $c = Bc \sin. Az. B$ und $\triangle x =$

Fig. 42. BC. cos. n. Az. C, so erhält man für △y von C = BC. cos. n. sin. Az. B. und △x = BC. cos. n. cos. Az. B. u. s. w.

Wären statt der geneigten Linien BC, CD ꝛc. die Horizontallinien Bc, Cx ꝛc. gemessen worden, so hätte man bei der Berechnung der Höhen von C, D, E, statt der Sinusse der Neigungswinkel, die Tangenten derselben in Rechnung ziehen müssen. Sollte ein Tunnel oder ein Stollen von A nach F gegraben werden, so dürfte es nicht als überflüssig erscheinen, die Linie von A nach F abzustecken und die Elevationswinkel nochmals zur Controle zu messen und die Berechnung der Steigung oder Senkung hierauf zu wiederholen.

Fig. 43. 2. Aufgabe. Es soll der Bergrücken ADEB, Fig. 43, von dem höher liegenden Punkte A nach dem tiefer liegenden Punkte B durch einen Eisenbahntunnel verbunden werden. Auf der schiefen Fläche des Berges können keine Standlinien, wohl aber auf den Punkten D, von wo man nach A, und von E, wo man nach B und D sehen kann, Vertikalwinkel gemessen werden. Man verlangt die Länge der Linie AB und deren Neigung gegen die Horizontalebene zu wissen?

Um diese Aufgabe lösen zu können, müssen wir von A nach B um den Berg herum und wenigstens alle Horizontallinien und Horizontalwinkel messen und aus diesen die horizontale Länge der Linie AB und den Winkel, unter welchem die Linie in den Berg schneidet, berechnen, was gerade so wie in der vorhergehenden Aufgabe geschehen, bewirkt werden kann.

Nachdem dieses geschehen, wird die Linie von A nach B über D und E aufgeschluchtet und von D nach A und auch in derselben Vertikalebene nach C visirt um die Standlinie AC = b, welche zu messen ist, zu erhalten. Bei D werden die Neigungswinkel x und y gemessen.

Von D begiebt man sich nach E, wo nach B, und, um auch hier wieder einen Anhalt zur Berechnung zu erhalten, in der nämlichen Vertikalebene nach F visirt wird, um die Linie BF, welche

ebenfalls zu meſſen iſt, zu erhalten. Selbſtverſtändlich müſſen die Punkte C und F mit Signal und Pflöcken bezeichnet werden. Fig. 42.

In E werden die Vertikalwinkel, nämlich der Elevationswinkel nach D = z und die Depreſſionswinkel nach B und F, nämlich die Winkel v und w gemeſſen. Sind dieſe Data bekannt, ſo laſſen ſich die Länge der Linie AB und deren Neigungswinkel bei B folgendermaßen berechnen:

Es iſt $DK = \frac{AC \sin. x. \sin y}{\sin. (x-y)}$, nämlich $DK = AD \sin x$.

Es iſt aber $AC : AD = \sin. (x-y) : \sin. y$ folglich

$AD = \frac{AC \sin. y}{\sin. (x-y)}$. Wird dieſer Werth AD in die erſte Gleichung ſubſtituirt, ſo iſt $DK = \frac{AC \sin. x \sin. y}{\sin. (x-y)}$.

$$EG = \frac{BF. \sin. v. \sin. w}{\sin. (v-w)}.$$

$$AK = DK \text{ cotg. } x.$$

$$BG = EG \text{ cotg. } v.$$

$$DJ = EJ \text{ tang. } z.$$

$$EJ = LB - AK - BG.$$

$$DH = DJ + EG.$$

$$AL = DH - DK = JD + EG - DK.$$

$$\text{tang. } ABL = \frac{AL}{LB} \text{ und } AB = \frac{LB}{\sin. ABL}.$$

Es ſei BL = 4000′ AC = 1100′; BF ebenfalls 1100′ $< x = 39°$; $y = 30°$; $z = 55°$; $v = 68°$; $w = 38°$ ſo iſt

$$DK = \frac{1100. \sin. 39°. \sin. 30°}{\sin. (39°-30°)} = 2233.$$

$$EG = \frac{1100. \sin. 68°. \sin. 38°}{\sin. (68°.-38°)} = 1267.$$

$$AK = 2233 \text{ cotg. } 39° \;.\;. = 2757.$$

$$BG = 1267 \text{ cotg. } 68° \;.\;. = 512.$$

$$EJ = 4000 - 2757 - 512 = 741.$$

$$DJ = 731 \text{ tang. } 55° \;.\;. = 1044.$$

Fig. 43.

$$AL = 1044 + 1267 - 2233 = 78.$$

$$\text{tang. } ABL = \frac{78}{4000} \quad . \quad . \quad = 1°07'02''.$$

$$AB = \frac{4000}{\text{sin. } 1°07'02''} \quad . \quad . \quad . \quad = 4003.$$

§. 13.

Von der Waldtheilung.

Wenn gemeinschaftliches größeres Waldeigenthum in privatives, gleichgültig, ob in das von moralischen Personen — Gemeinden, Stiftungen — oder von physischen Personen übergehen, oder aber auch, wenn Servituten, welche auf Waldungen lasten, durch Abtretung von Grund und Boden abgelöst werden sollen, finden Waldtheilungen statt, wobei nicht blos auf die Verschiedenheit des Holzbestandes, sondern auch auf die verschiedene Ertragsfähigkeit des Bodens geeignete Rücksicht genommen werden muß. Die mit der technischen Ausführung des Geschäftes bestimmte Person — der Forstmann — hat die Ertragsverhältnisse des Waldes zu ermitteln und die Resultate seiner desfallsigen Untersuchungen dem mit der Ausführung der Theilung auf dem Lokal beauftragten Geometer mitzutheilen, falls er nicht selbst Geometer sein sollte.

Es geschieht dieses gewöhnlich in der Art, daß entweder das Verhältniß der verschiedenen Bonitäten, oder aber, daß der jährliche Durchschnittsertrag in Geld berechnet, von den verschiedenen Bodenklassen angegeben wird. Es ist dieses selbstredend für die Ausführung der mathematischen Berechnungen ganz gleichgültig und es hat der Geometer nur nöthig die ihm gegebenen Zahlen in einem richtigen Verhältniß auf die einfachste Art darzustellen.

Wir wollen bei den nachfolgenden mathematischen Betrachtungen diejenigen Faktoren, womit man die Fläche multipliciren muß, um deren Werth zu erhalten, Werthfaktoren und die Produkte selbst, Bonitätstheile nennen.

Bei Ausführung einer Waldtheilung nun kommen in mathematischer Beziehung hauptsächlich zwei Fälle vor, nämlich:

I. Die Theilungslinien sollen vom Umfang in einer bestimmten Richtung ablaufen, oder Fig.43.

II. sie sollen von einem gegebenen Punkte strahlenförmig ausgehen.

Die mathematische Behandlung dieser zwei Fälle ist wesentlich verschieden und es muß jeder für sich betrachtet werden.

Iter Fall. Es soll ein Wald, dessen Boden seiner Produktionsfähigkeit nach in mehrere Klassen zerfällt, durch eine gerade Linie in bestimmter Richtung so getheilt werden, daß der abgeschnittene Theil eine gewisse bestimmte Menge Holz produciren, oder aber einen bestimmten Ertrag in Geld liefern kann.

Es bedarf wohl keiner weiteren Ausführung, daß dem Theilungsgeschäfte eine genaue Messung, und, wie wir hier unterstellen, polygonometrische Berechnung im Ganzen sowohl als nach den einzelnen Bodenklassen vorausgehen muß, und daß auch das Verhältniß, nach welchem die Theilung zu geschehen hat, gegeben ist.

Man prüfe auf der Karte durch eine überschlägige Berechnung, wie die Theilungslinie gezogen werden muß, um den gestellten Bedingungen zu entsprechen und ziehe dann eine provisorische Theilungslinie, welche, wie Figur 44 ergiebt, bei dem Umfangspunkte K Fig.44. beginnt und bei dem Umfangspunkte M endigt, und die verschiedenen Bonitätsklassen etwa, sowie auf der Figur angeben, durchschneidet. Wir wollen noch weiter bemerken, daß die Linie NS die Achse ist, worauf die Berechnung der Coordinaten stattgefunden hat.

Um nun die oberhalb oder unterhalb der provisorisch gezogenen Theilungslinie liegende Waldfläche berechnen zu können, müssen wir die Coordinaten von den Durchschnittspunkten der inneren Figuren, im vorliegenden Falle von X und Y berechnen. Die Ordinaten und Abscissen von den Punkten K und M, als gegebenen Richtpunkten, sind als bekannt anzunehmen.

Wir erreichen diesen Zweck dadurch, daß wir die Theilungslinie als Achse annehmen und die Differenzen der Ordinaten und Abscissen von den Umfangspunkten neu berechnen, oder aber, daß

Fig. 44. wir die Coordinaten für die fehlenden Punkte, im vorliegenden Falle von X, Y auf die gegebene allgemeine Achse berechnen.

Das erstere kann von dem Punkte M aus bis zu dem Punkte U ohne Anstand geschehen. Die Ordinate von X muß = o und die Abscissen von X = MX sein. Die Differenzordinate von U ist sonach die Ergänzung der Ordinate von U zu Null und die Differenz Abscisse ist durch das Azimuth und $\triangle y$ von U durch den Ausdruck $\triangle y$ cotg. Az. U leicht zu finden. *)

Bei Berechnung der Ordinaten und Abscissen in der daran stoßenden Bodenklasse brauchen wir erst da zu beginnen, wo wir die erste Figur verlassen haben.

Auf diese Art lassen sich zwar Ordinaten und Abscissen von den durch die Theilungslinie durchschnittenen Linien finden, allein diese Rechnungen sind ziemlich weitläufig und können durch folgendes Verfahren erspart werden:

Fig. 45. Es sei Figur 45 AG die Achse, AB die provisorisch gezogene Theilungslinie, welche die erste Bonitätslinie CG bei B durchschneidet und ist sonach die Linie CB und die Coordinaten des Punktes B zu finden.

Es ist DE = AE tang. Az. Thl. = (x von C — x von A.
tang. Az. Thl. = b.

$$CE = (y \text{ von } C - y \text{ von } A) = a.$$
$$CD = CE - DE = a - b;$$

sodann ist in dem $\triangle$ BCD

$$\sin. B : CD = \sin. D : CB \text{ und } CB = \frac{CD \sin. D}{\sin. B.}$$

Es ist aber sin. B = sin. (D + C) und

$$< D = 180^\circ - (90^\circ - \text{Az. Thl.}) = 90^\circ + \text{Az. Thl.}$$
$$< C = 3\,R - \text{Az. C.}; \text{ es ist also}$$

$$CB = \frac{(a-b) \sin. (90^\circ + \text{Az. Thl.})}{\sin. (\text{Az. Thl.} - \text{Az. C})} = \frac{(a-b) \cos. \text{Az. Thl.}}{\sin. (\text{Az. Thl.} - \text{Az. C.})}$$

*) Fällt Az. U wie in der Figur in den 3. Quadranten, so wird $\triangle$ x von U nach x negativ; fällt dagegen Az. U in den 4. Quadranten, so wird dasselbe positiv.

Hieraus läßt ſich nicht blos die Ordinate und Abſciſſe vom Punkte B, ſondern auch die Länge der Theilungslinie AB finden. Fig. 45

Beiſpiel. Es ſei y von C — y von A = 2500 = a x von C — x von A = 3980; Az. C = 252°30'; Az. Thl. = 26°00, folglich b = 3980. tang. 26°00 = 1941 und a — b = 559.

log. 559 . . . . . = 2,7474188
log. cos. 26° . . . . . = 9,9536602
2,7010790

Az. Thl. . . . . = 26°, 00'
Az. C . . . . . = 252°, 30'
Az. Thl. — Az. C = — 226°, 30'
log. sin. 226°, 30' . . . . . = 9,8605622
Diff. = 2,8405168

= log. BC folglich BC = + 692,6

log. sin. 252°, 30' = 9,9794195 log. cos. 252°, 30' = 9,4871418
log. 692,6 . . . = 2,8405168 log. 692,6 . . . . = 2,8405168
2,8199363 2,3276586
— log. 660,6 = — log. 212,6.

Es war y von C = + 2500,0 folglich y von B = + 1839,4.

Nun iſt $AB = \frac{\text{y von B}}{\text{sin. Az. Thl.}} = \frac{1839,4}{\text{sin. } 26°, 00'}$

log. 1839,4 . . = 3,2646762
log. sin. 26°, 00' = 9,6418420
3,6228342 = log. 4196 = AB.

Wir berechnen nun aus ſämmtlichen bekannten y und $\triangle x$ den Inhalt und die Bonitätstheile des abgeſchnittenen Waldſtücks MDEF bis K und ſehen zu, ob wir uns den Bedingungen der Aufgabe ziemlich genähert haben. Wäre dieſes noch nicht der Fall und voraus zu ſehen, daß die Theilungslinie noch über den einen oder anderen Winkelpunkt, z. B. über U hinausfalle, ſo müßten wir eine neue Theilungslinie ziehen und eine neue Berechnung an-

Fig. 45. stellen, bis wir uns der Wahrheit so weit genähert haben, daß wir überzeugt sein dürfen, die richtige Theilungslinie werde über keinen Winkelpunkt mehr hinausfallen.

Erste Auflösung.

Fig. 44. Wir wollen nunmehr annehmen, das durch MK abgeschnittene Waldstück sei um J Bonitätstheile zu groß gefunden worden, weßhalb das Trapez KOPM von dem oberen Stück noch abgeschnitten werden müsse, und zwar durch die mit MK parallele OP.

Diese Linie ist bestimmt, sobald ihre senkrechte Entfernung von KM die wir y nennen wollen, gefunden sein wird.

Wir wollen nunmehr annehmen, daß die erste Bodenklasse = m; die zweite = n und die dritte = o Bonitätstheile pro Morgen enthalte, daß die Linie KY = a, YX = b, XM = c gesetzt, und daß die Winkel in der Theilungslinie mit α, β, γ, δ, ε, ζ bezeichnet werden.

In diesem Falle ist:

$$J=\left(ay-\frac{y^2.\operatorname{ctg}.\alpha-y^2.\operatorname{ctg}.\beta}{2}\right)m+\left(by-\frac{y^2.\operatorname{ctg}.\gamma-y^2.\operatorname{ctg}.\delta}{2}\right)o$$

$$+\left(cy-\frac{y^2.\operatorname{ctg}.\varepsilon-y^2.\operatorname{ctg}.\zeta}{2}\right)n,$$

wo man auf die Zeichen der Cotangenten in den verschiedenen Quadranten geeignete Rücksicht nehmen muß.

(Es bedarf wohl keiner weitläuftigen Ausführung, daß da wo die Bonitätsgrenzen unter spitzen Winkeln auf die Theilungslinie stoßen, für die kleinen Dreiecke an den Bonitätsgrenzen wirklich das Zeichen — genommen werden müsse, während da, wo die Bonitätsgrenzen stumpfwinkelicht aufstoßen, das Dreieck an der einen Bonität addirt, das andere gleich große der angrenzenden Bonität aber abgezogen werden muß. Weil die Cotangenten von stumpfen Winkeln negativ sind, so verwandelt sich bei den stumpfwinkelichten Dreiecken das Zeichen — in + und deßhalb muß man in der allgemeinen Formel bei allen Dreiecken das Zeichen — gebrauchen.)

Was mit y^2 und y multiplicirt ist allein geschrieben giebt der Gleichung folgende Gestalt:

$$-2J = y^2 (m.\ \text{cotg.}\ \alpha + m.\ \text{cotg.}\ \beta + o.\ \text{cotg.}\ \gamma + o.\ \text{cotg.}\ \delta + n.\ \text{cotg.}\ \varepsilon + n.\ \text{cotg.}\ \zeta) - 2y\,(am + bo + cn),\ \text{sonach}$$

$$y^2 - \frac{2y\,(am + bo + cn)}{m.\ \text{cotg.}\ \alpha + m.\ \text{cotg.}\ \beta + o.\ \text{cotg.}\ \gamma + o.\ \text{cotg.}\ \delta + n.\ \text{cotg.}\ \varepsilon + n.\ \text{cotg.}\ \zeta} =$$

$$= \frac{-2J}{m.\ (\text{cotg.}\ \alpha + \text{cotg.}\ \beta) + o\ (\text{cotg.}\ \gamma + \text{cotg.}\ \delta) + n\ (\text{cotg.}\ \varepsilon + \text{cotg.}\ \zeta)}.$$

Um diese unreine quadratische Gleichung auflösen zu können, muß man das Quadrat des halben Coefficienten des zweiten Gliedes auf beiden Seiten der Gleichung addiren und die Quadratwurzel extrahiren. Wir erhalten auf diese Art:

$$y - \frac{am + bo + cn}{m\,(\text{cotg.}\ \alpha + \text{cotg.}\ \beta) + o\,(\text{cotg.}\ \gamma + \text{cotg.}\ \delta) + n\,(\text{cotg.}\ \varepsilon + \text{cotg.}\ \zeta)} =$$

$$\sqrt{\frac{(am + bo + cn)^2}{(m\,(\text{cotg.}\ \alpha + \text{cotg.}\ \beta) + o\,(\text{cotg.}\ \gamma + \text{cotg.}\ \delta) + n\,(\text{cotg.}\ \varepsilon + \text{cotg.}\ \zeta))^2} - \frac{2J}{m\,(\text{cotg.}\ \alpha + \text{cotg.}\ \beta) + o\,(\text{cotg.}\ \gamma + \text{cotg.}\ \delta) + n\,(\text{cotg.}\ \varepsilon + \text{cotg.}\ \zeta)}}$$

folglich

$$y = \frac{am + bo + cn}{m\,(\text{ctg.}\ \alpha + \text{ctg.}\ \beta) + o\,(\text{ctg.}\ \gamma + \text{ctg.}\ \delta) + n\,(\text{ctg.}\ \varepsilon + \text{ctg.}\ \zeta)} \pm \sqrt{\frac{(am + bo + cn)}{(m\,(\text{cotg.}\ \alpha + \text{cotg.}\ \beta) + o\,(\text{cotg.}\ \gamma + \text{cotg.}\ \delta) + n\,(\text{cotg.}\ \varepsilon + \text{cotg.}\ \zeta))^2} - \frac{2J}{m\,(\text{cotg.}\ \alpha + \text{cotg.}\ \beta) + o\,(\text{cotg.}\ \gamma + \text{cotg.}\ \delta) + n\,(\text{cotg.}\ \varepsilon + \text{cotg.}\ \zeta)}}$$

Wird das zweite Glied der unter dem Wurzelzeichen stehenden Größe mit seinem eigenen Nenner multiplicirt, so wird der Nenner der beiden Glieder unter dem Wurzelzeichen gemeinschaftlich und ein Quadrat, weßhalb sich nach dieser Operation y in lauter bekannten Größen durch folgenden Ausdruck ergiebt, nämlich:

$$\text{I. } y = \frac{am + bo + cn \pm \sqrt{(am + bo + cn)^2 - 2J\,(m(\text{cotg.}\,\alpha + \text{cotg.}\,\beta) + o(\text{cotg.}\,\gamma + \text{cotg}\,\delta) + n(\text{cotg.}\,\varepsilon + \text{cotg.}\,\zeta))}}{m(\text{cotg.}\,\alpha + \text{cotg.}\,\beta) + o(\text{cotg.}\,\gamma + \text{cotg.}\,\delta) + n(\text{cotg.}\,\varepsilon + \text{cotg.}\,\zeta)}$$

Weil $< \beta = 180 - \gamma$ und $\delta = 180 - \varepsilon$, so ist cotang. $\beta = -$ cotang. γ und cotang. $\delta = -$ cotang. ε, wie aus dem bekannten Satze cotang. $(a - b) = \left(\frac{\text{cotg. a. cotg. b} + 1}{\text{cotg. b} - \text{cotg. a}}\right)$ hervorgehet, wenn man $a = 180$; $b = \beta$ setzt und das Endliche gegen das Unendliche vernachlässigt.

Es ist sonach auch:

$$\text{II. } y = \frac{am + bo + cn \pm \sqrt{(am + bo + cn)^2 - 2J.\,m\,(\text{cotg.}\,\alpha - \text{cotg.}\,\gamma) + o\,(\text{cotg.}\,\gamma - \text{cotg.}\,\varepsilon) + n\,(\text{cotg.}\,\varepsilon + \text{cotg.}\,\zeta)}}{m\,(\text{cotg.}\,\alpha - \text{cotg.}\,\gamma) + o\,(\text{cotg.}\,\gamma - \text{cotg.}\,\varepsilon) + n\,(\text{cotg.}\,\varepsilon + \text{cotg.}\,\zeta)}$$

Diese Formeln sind nicht so schwierig zu berechnen, wie auf den ersten Blick scheinen möchte. Das folgende Beispiel möge zur Erläuterung des Verfahrens dienen. Wie Fig. 46 ergiebt, sind fünf Bodenverschiedenheiten von der provisorischen Theilungslinie durchschnitten und eine Bonitätsklasse stößt mit ihrem Scheitel auf die Theilungslinie auf; es sei $a = 134{,}0$; $b = 127{,}0$; $c = 0$; $d = 109{,}0$; $e = 147{,}0$; $\alpha = 75°$; $\beta = 78°$; $\gamma = 102°$; $\delta = 83°$; $\varepsilon = 39°$; $\zeta = 58°$; $\eta = 104°$; $\vartheta = 76°$; $\iota = 74°$; $m = 8$; $n = 9$; $o = 10$; $p = 11$; $q = 12$; $2J = 814998$.

Fig. 46.

am = 134. 8 = 1072
bn = 127. 9 = 1143
co = 0.10 = 0
dp = 109.11 = 1199
eq = 147.12 = 1764

Sma. 5178.

$5178^2 = 27811684.$

cotg. α = cotg. 75° = 0,26795 cotg. γ = cotg. 102° = −0,21256
cotg. β = cotg. 78° = 0,21126 cotg. δ = cotg. 83° = +0,12278

Sma. = 0,48051 Sma. = −0,08978
m = 8 8 n = 9 9
+3,84408 −0,80802

ctg. $\delta + \varepsilon$ *) = ctg. 122° = -0,62487 ctg. ε = ctg. 58° = 0,62487
ctg. $\varepsilon + \zeta$ = ctg. 97° = -0,12278 ctg. ζ = ctg. 104° = -0,24933

Sma. = −0,74765 Sma. = +0,37554
o = 10 10 p = 11 11
−7,47650 +4,13094

cotang. ϑ = cotang. 76° = 0,24933
cotang. ι = cotang. 74° = 0,28675

Sma. = 0,53608
q = 12 12
+ 6,43296

*) Um das Dreieck HDJ richtig in Rechnung zu ziehen, müssen die Winkel δ und ε und sodann die Winkel ε und ζ summirt und die Cotangenten dieser Winkel ebenfalls summirt und mit dem Bonitätscoefficienten multiplicirt werden. Wenn man sich ein Perpendikel von dem Punkte D auf HJ gefällt denkt, so wird die Sache deutlicher werden.

Daß cotang. $(\delta + \varepsilon) = -$ cotang. ζ und cotang. $(\varepsilon + \zeta) = -$ cotang. δ bedarf keines weiteren Beweises.

Fig. 46.

Zusammenstellung.

+	−
3,84408	0,80802
4,13094	7,47650
6,43296	
+ 14,40798	− 8,28452
− 8,28452	

alg. Sma. = 6,12346

log. 2J = log. = 814998 = 5,9111576

log. 6,12346 . . . . . = 0,7869969

6,6981545 = log. 4990630

5178^2 = 26811684

4990603

Diff. = 21821054

und hieraus die Quadratwurzel gezogen giebt = ± 4671.

Diese Wurzel muß mit dem Zeichen — in Rechnung genommen werden, weil sonst y über einen Winkelpunkt der Bonitätslinie hinaus fallen würde.

Es ist nunmehr

$$y = \frac{5178 - 4671}{6,12346} = \frac{507}{6,12346}$$

log. 507 . . = 2,7050080

log. 6,12346 = 0,7869969

Diff. = 1,9180111 = log. 82,8.

Nach der Formel II. für y stellt sich die Rechnung folgendermaßen:

ctg. α = ctg. 75° =	0,26795	ctg. γ = ctg. . 102° =	−0,21256
ctg. γ = − ctg. 102° =	+0,21256	ctg. $\varepsilon + \zeta$ = − ctg. 97° =	+0,12278
Sma.	+0,48051		− 0,08978
	8		9
	+3,84408		−0,80802

ctg. $\varepsilon + \zeta$ = ctg. 97° =	−0,12278	ctg. ε = ctg. . . 58° =	0,62487	Fig. 46.
ctg. ζ = . . ctg. 58° =	0,62487	ctg. ϑ = ctg. . . 76° =	0,24933	
	−0,74765		+0,37554	
	10		11	
	−7,47650		+4,13094	
ctg. ϑ = . . ctg. 76° =	0,24933			
log. ε = . . ctg. 74° =	0,28675			
	+ 0,53608			
	12			
	+6,43296			

Die übrige Calkul bleibt sich gleich und das Resultat ist dasselbe wie oben.

Die Ausführung der Rechnung nach Formel II. erfordert größere Achtsamkeit als nach Formel I.

Daß man bei Entwickelung der Gleichung statt der Cotangenten auch die Sinusse der Neigungswinkel hätte in Rechnung ziehen können, wird der Leser von selbst finden, so wie auch, daß er am Ende doch wieder auf obige Formel zurückkommt. Sollte nur eine Bodenklasse vorhanden sein, so fallen alle mit cotg. γ cotg. δ ꝛc. multiplicirten Glieder fort und die Gleichung reducirt sich auf folgenden Ausdruck:

$$y = \frac{am + bn + co \pm \sqrt{(am + bn + co)^2 - 2J(\operatorname{ctg}.\alpha + \operatorname{ctg}.\beta)}}{\operatorname{cotg}.\alpha + \operatorname{cotg}.\beta}$$

Da im vorliegenden Falle m, n, und o sich gleich sind, so erhält die Formel die noch einfachere Gestalt

$$y = \frac{a + b + c \pm \sqrt{(a + b + c)^2 - 2J(\operatorname{cotg}.\alpha + \operatorname{cotg}.\beta)}}{\operatorname{cotg}.\alpha + \operatorname{cotg}.\beta}$$

Die Werthe a, b und c sind die Grundlinien der Einzeltrapeze, wofür wir jetzt b setzen wollen, so stellt sich der Werth von

$$y = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 2J(\operatorname{cotg}.\alpha + \operatorname{cotg}.\beta)}}{\operatorname{cotg}.\alpha + \operatorname{cotg}.\beta}$$

Fig. 46. Wie man ſich dieſen Ausdruck auch unmittelbar aus der Figur ableiten könne, wird jeder Leſer ſelbſt finden.

Zweite Auflöſung.

Wenn bei der proviſoriſch gezogenen Theilungslinie nicht allein die Grundlinien der einzelnen Trapezien, ſondern auch die denſelben gegenüber liegenden Parallelen, nämlich die Linie FG, GH ꝛc. berechnet worden ſind, ſo läßt ſich die Berechnung der Höhe des noch abzuſchneidenden Trapezes auch algebraiſch bewerkſtelligen.

Es iſt nämlich jetzt die Aufgabe nicht verſchieden von der, wo von einem Paralleltrapez eine beſtimmte Fläche durch eine mit den parallelen Seiten parallellaufende Linie abgeſchnitten werden ſoll. Weil wir im vorliegenden Falle die uns noch fehlende Fläche von dem untern Theile des Trapezes abſchneiden müſſen, ſo geſchieht dieſes durch die Formel $\frac{dx^2}{h} - 2ax = -2J$, wo a die Grundlinie, h die Höhe des ganzen Trapezes und d die Differenz zwiſchen der oberen und unteren Grundlinie bedeutet *). Wenn wir unſer voriges Beiſpiel beibehalten und weiterhin die Linie FG, GH ꝛc. der Reihe nach mit r, s, t, u, v bezeichnen, für r aber 94,2, $s = 134{,}3$; $t = 62{,}0$; $u = 77{,}9$ und $v = 102{,}6$ ſetzen, ſo haben wir folgende Gleichungen auflöſen:

*) Die Ableitung der Formel geſchieht kurz folgendermaßen: In der Fig. 47 ſeien DE und FG mit der Linie BC parallel; FH ſei die richtige Theilungslinie und h und x die ſenkrechten Abſtände von AB, ſonach die Höhen vom ganzen und vom abzuſchneidenden Trapez. Die Dreiecke ADE und AFG ſind ähnlich und man hat Proportion: $AE.AG = h:x$ oder $a-b: AG = h:x$ folglich $AG = \frac{(a-b)x}{h} = \frac{dx}{h}$ u. $2J = (AB + FH)x = \left(a + (a - AG)\right)x = \left(2a - \frac{dx}{h}\right)x = 2ax - \frac{dx^2}{h}$ wie oben. Eine weitere Auflöſung dieſer Gleichung wollen wir vorerſt unterlaſſen, und nur bemerken, daß wenn die obere Linie DC größer als die untere AB iſt, d negativ wird. Wo ein Dreieck vorkommt, wird entweder a oder d Null, je nachdem die Spitze unten oder oben aufſteht.

Fig. 46.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\quad m\,.\,39{,}8\,x^2 : h - m\,.\,2\,.\,134\,.\,x \\ 2) -n\,.\,7{,}3\,x^2 : h - n\,.\,2\,.\,127\,.\,x \\ 3) -o\,.\,62{,}0\,x^2 : h - o \\ 4) +p\,.\,31{,}1\,x^2 : h - p\,.\,2\,.\,109\,.\,x \\ 5) +q\,.\,44{,}4\,x^2 : h - q\,.\,2\,.\,147\,.\,x \end{array}\right\} = -2\,J.$$

Multipliciren wir mit den Werthen von m, n, o, p und q, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} 1) +318{,}4\,.\,x^2 : h - 2144\,.\,x \\ 2) -\ 67{,}7\,.\,x^2 : h - 2236\,.\,x \\ 3) -620{,}0\,.\,x^2 : h - 0 \\ 4) +342{,}1\,.\,x^2 : h - 2398\,.\,x \\ 5) +532{,}8\,.\,x^2 : h - 3528\,.\,x \end{array}\right\} = -2\,J.$$

Addiren wir mit Rücksicht auf die Zeichen und setzen für h den oben gefundenen Werth = 82,8 für J aber = 407499, so erhalten wir:

$$+\frac{507{,}6}{82{,}8}\,x^2 - 10356\,x = -814998 \text{ oder}$$

$6{,}13\,x^2 - 10356\,x = -814998$ folgl. $x^2 - 1698\,x + = -132952$.

Machen wir diese unreine quadratische Gleichung durch Beifügung des halben Coefficienten des zweiten Gliedes zum Quadrat erhoben, zu einer vollständigen und lösen sie auf, so erhalten wir $x - 844{,}5 = \pm\sqrt{580228}$ und schließlich $x = +844{,}5 - 761{,}7 = 82{,}8$, d. h. wir bedürfen die ganze Höhe, um die bestimmte Anzahl Bonitätstheile zu erhalten. Daß wir bei der Wurzel das Zeichen — in Rechnung nehmen müssen, ergiebt sich daraus, weil die Höhe des abzuschneidenden Trapezes die Höhe des ganzen Trapezes in keinem Fall übersteigen darf. Es giebt diese zweite Art der Auflösung der Aufgabe eine schöne Controle für die erste Auflösung und wie wir gesehen haben, dasselbe Resultat, wenn nur richtig gerechnet wird.

Ein drittes Verfahren diese wichtige Aufgabe zu lösen, ist Folgendes:

Man reducire die verschiedenen Bonitätsklassen m, n, o, p, q auf eine willkürliche mittlere w dadurch, daß man die parallelen

Fig. 46. Seiten einzeln mit den Werthcoefficienten multiplicirt und die Summe dieſer Werthe durch den mittleren Werthcoefficienten dividirt. Der Quotient giebt die Baſis für das mittlere Trapez von gleichem Werthe. Die gegenüberſtehenden Parallelen eben ſo behandelt, ergiebt die Parallele für die mittlere Bonität.

Wir wollen zuerſt das Verfahren beweiſen und dann durch ein Beiſpiel erläutern.

Man denke ſich die Linie MR parallel mit AB, Figur 46, und ſo nahe an dieſelbe gezogen, daß man die ſehr kleinen Trapeze für Parallelogramme, reſp. für Rechtecke anſehen kann. Die gemeinſchaftliche ſehr kleine — eigentlich unendlich kleine — Höhe ſetze man nun $\triangle h$ und die Grundlinie für das mittlere Rechteck $= x$, ſo hat man für den Werth der ſehr kleinen Figur ABMR folgenden Ausdruck:

$$(am + bn + co + ep + fq)\,\triangle h = w.x.\triangle h, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{am + bn + co + ep + fq}{w}$$

Die obere Parallele x' wird eben ſo durch den Ausdruck gefunden:

$$x' = \frac{a'.m + b'.n + c'.o + e'.p. + f'.q}{w}$$

Da nun ſämmtliche Einzelwerthe der ſehr kleinen Figuren dem gemeinſchaftlichen Werthe gleich ſtehen, ſo muß nothwendiger Weiſe der Werth für jede Parallele dem gemeinſchaftlichen correſpondirenden Werthe entſprechen und ſonach auch die Werthſumme der verſchiedenen Trapezien, dem Werthe des auf mittlere Bonität reducirten Trapezes gleich ſein *).

Es ſeien nun ſämmtliche Zahlenwerthe ganz dieſelben wie im vorigen Beiſpiele, der mittlere Bonitätswerth aber $= 1{,}0$ ſo hat man:

*) Wer mit den erſten Elementen der Rechnung des Unendlichen vertraut iſt, wird den Beweis noch kürzer und bündiger führen können.

$x = 134{,}0 \times 0{,}8 + 127{,}0 \times 0{,}9 + 0 \times 1{,}0 + 109{,}0 \times 1{,}1 +$ Fig. 46.
$147{,}0 \times 1{,}2 = 517{,}8$

$x' = 94{,}2 \times 0{,}8 + 134{,}3 \times 0{,}9 + 62{,}0 \times 1{,}0 + 77{,}9 \times 1{,}1 +$
$102{,}6 \times 1{,}2 = 467{,}0$

Man hat sonach folgende Gleichung aufzulösen:

$$\frac{dx^2}{h} - 2ax = -2J \text{ oder}$$

$$\frac{50{,}8}{82{,}8}x^2 - 1035{,}6x = -81499{,}8$$

$$0{,}6135x^2 - 1035{,}6x = -81499{,}8$$

$$x^2 - 1688\,x + 844^2 = -132844 + 844^2$$

$$x - 844 = \pm\sqrt{579492}$$

$x = 844 - 761{,}2 = 82{,}8$ wie bei den beiden vorhergehenden Verfahrensarten.

II. Die Theilungslinie soll von einem gegebenen festen Fig. 46. Punkte ausgehen. Auch hier muß man vorläufig prüfen, welche Figur die abzuschneidende Fläche erhalten, und in welche Gegend der äußeren Waldgrenze dieselbe fallen werde, worauf man eine vorläufige Linie ziehet, um hiernach ermitteln zu können, wie groß die abgeschnittene Fläche ist. Je nach dem Ausfall dieser Fläche muß die vorläufig gezogene Theilungslinie auf der äußeren Grenzlinie so weit verrückt werden, daß an der erforderlichen Fläche weder viel fehle, noch daß derselben viel beizuschlagen sei, so zwar, daß zwei Grenzpunkte ermittelt werden, zwischen welchen die richtige Theilungslinie einschneidet. Es sei B C D ꝛc., Figur 48, ein Theil der äußeren Waldgrenze; A sei der Punkt von welchem die Theilungslinie ausgehen soll. Nach vorläufiger Berechnung ist die durch die willkürlich gezogene Linie A B abgeschnittene Fläche zu groß; die durch A C abgeschnittene aber zu klein. Nach weiterem Ueberschlage der durch A B abgeschnittenen Fläche hat sich ergeben, daß die richtige Theilungslinie die Grenzlinie zwischen B und C schneiden wird. Um den richtigen Punkt C' des Einschnittes der Theilungslinie in die äußere Grenze zu finden, und um dieselbe

Fig. 48. von A aus durchhauen zu können, werden wir die Linie BC' und den Winkel C'AB = φ zu berechnen haben.

Man setze die oberhalb der Linie AB = a abzuschneidende Fläche = J und die noch unbekannte BC' = x, so ist:

$$2J = AB.\ x.\ \sin.\ \gamma\ ^*), \text{ sonach } x = \frac{2J}{AB.\ \sin.\ \gamma} \text{ und}$$

$$\text{tang.}\ \varphi = \frac{C'x}{AX} = \frac{x\ \sin.\ \gamma}{a - x\ \cos.\ \gamma}.$$

Zur Rechnung bequemer findet man den Winkel

$$\text{cotg.}\ \varphi = \frac{a^2 - 2J\ \text{cotg.}\ \gamma}{2J} = \frac{a^2}{2J} - \text{cotg.}\ \gamma.$$

Der Winkel φ läßt sich auch auf folgende Art berechnen:

$$\text{Es ist } 2J = \frac{a^2\ \sin.\ \gamma\ \sin.\ \varphi}{\sin.\ (\gamma + \varphi)} = \frac{a^2\ \sin.\ \gamma\ \sin.\ \varphi}{\sin.\ \gamma\ \cos.\ \varphi + \sin.\ \varphi\ \cos.\ \gamma}$$

Im Zähler und Nenner mit sin. γ cos. φ dividirt giebt

$$2J = \frac{a^2}{\text{cotg.}\ \varphi + \text{cotg.}\ \gamma} \text{ woraus folgt cotg. } \varphi = \frac{a^2}{2J} - \text{ctog.}\ \gamma$$

wie oben.

Sind mehrere Bodenverschiedenheiten vorhanden und auszuscheiden, so wird das Verfahren viel complicirter, wie aus nachstehenden Betrachtungen hervorgeht.

Vorausgesetzt, es seien drei Bonitätsklassen vorgefunden und ausgeschieden worden. Die vorläufig gezogene Theilungslinie AB schneide deren Grenzen unter den Winkel α, β und γ und ergebe die oberhalb AB liegende abzuschneidende Fläche zu groß, während eine zweite Linie dieselbe zu klein angiebt, so daß die richtige Theilungslinie AC' in die Grenzlinie BC falle.

Um die durch die vorläufig gezogene Linie AB und AC abgeschnittenen Bonitätstheile für die verschiedenen Bodenklassen ermitteln zu können, sind die senkrechten Abstände der Durchschnittspunkte, nämlich die Linien CH, DJ und FK zu berechnen.

*) Der Winkel γ ist als bekannt anzunehmen, da derselbe aus den Ordinaten und Abscissen von A und B leicht berechnet werden kann.

Es kann dieses auf folgende Art geschehen: Fig. 48.

$$CH = BC.\ \sin.\ \gamma \text{ und } BH = BC\ \cos.\ \gamma.$$

Da $BC = d$ als bekannt angenommen werden kann, so ist das ganze Dreieck ABC leicht zu berechnen.

Im Dreieck ADE ist $DJ = DE.\ \sin.\ \beta$ und $JE = DE\ \cos.\ \beta$; ferner besteht in Folge der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ADJ und ACH die Proportion:

$CH : DJ = AH : AJ$ oder in den gleichwerthigen Ausdrücken:

$$d.\ \sin.\ \gamma : DE\ \sin.\ \beta = a + b + c - d\ \cos.\ \gamma$$
$$: a + b - DE\ \cos.\ \beta.$$

Hieraus wird, die Produkte der mittleren und äußeren Glieder gleichgesetzt

$$DE \text{ ermittelt zu } \frac{(a+b)\ d.\ \sin.\ \gamma}{(a+b+c)\ sn.\ \beta + d.\ cos.\beta.\ sn.\gamma - d.\ sn.\beta.\ cos.\ \gamma} =$$

$$= \frac{(a+b)\ d.\ \sin.\ \gamma}{(a+b+c)\ \sin.\ \beta + d.\ \sin.\ (\gamma - \beta)}$$

und nunmehr

$$DJ = \frac{(a+b)\ d.\ \sin.\ \beta.\ \sin.\ \gamma}{(a+b+c)\ \sin.\ \beta + d\ \sin.\ (\gamma - \beta)}$$

wodurch auch der Inhalt des Dreiecks ADE und durch dessen Bonitätscoefficienten auch dessen Bonitätstheile berechnet werden können. Ganz auf ähnliche Art wird

$$FK = \frac{a.\ d.\ \sin.\ \alpha\ \sin.\ \gamma}{(a+b+c)\ \sin.\ \alpha + d.\ \sin.\ (\gamma - \alpha)}$$

gefunden.

Das Verfahren selbst wird durch ein später vorgelegtes Beispiel erläutert, doch hat die Berechnung keine Schwierigkeit.

Erste Auflösung der Hauptaufgabe.

Nehmen wir nun an, daß die Fläche $FGA = m$, die Fläche $DEFG = n$ und die Fläche $BCDE = o$ Bonitätstheile pro Morgen enthalte, und daß oberhalb der vorläufig gezogenen Linie AB noch J Bonitätstheile abzuschneiden sind, so ergeben sich folgende Ausdrücke für die noch abzuschneidende Fläche:

Fig. 48. $J = \frac{o\,(a+b+c)^2 \sin.\varphi.\sin.\gamma}{2\sin.(\varphi+\gamma)}$ = dem Inhalt des Dreieckes ABC' reducirt auf die Bonität o; hiervon muß das Dreieck AD'E reducirt auf die Bonität o abgezogen, oder reducirt auf die Bonität n zugefügt werden, was beides durch folgenden Ausdruck geschiehet:

$$\frac{(n-o)\,(a+b)^2 \sin.\varphi.\sin.\beta}{2\sin.(\varphi+\beta)}.$$

In dieser Fläche ist das Dreieck AF'G, reducirt auf die Bonität n zu viel enthalten, wegegen dasselbe Dreieck reducirt auf die Bonität m noch zugefügt werden muß, um einen Ausdruck für die ganze noch abzuschneidende, auf ihre resp. Bonitätstheile reducirte Fläche zu erhalten. Es wäre sonach:

$$2J = \frac{o.(a+b+c)^2 \sin.\varphi.\sin.\gamma}{\sin.(\varphi+\gamma)} + \frac{(n-o)\,(a+b)^2 \sin.\varphi.\sin.\beta}{\sin.(\varphi+\beta)} + \frac{(m-n)\,a^2.\sin.\varphi.\sin.\alpha}{\sin.(\varphi+\alpha)}.$$

Werden die Sinusse der Summenwinkel in den Nennern aufgelöst und dann im ersten Gliede im Zähler und Nenner mit sin. φ. sin. γ; im zweiten Gliede mit sin. φ. sin. β und im dritten Gliede mit sin. φ. sin. α dividirt, so ergiebt sich die Gleichung:

$$2J = \frac{o\,(a+b+c)^2}{\text{ctg.}\varphi+\text{ctg.}\gamma} + \frac{(n-o)(a+b)^2}{\text{ctg.}\varphi+\text{ctg.}\beta} + \frac{(m-n)\,a^2}{\text{ctg.}\varphi+\text{ctg.}\alpha}.$$

Könnte hieraus der Ausdruck für cotg. φ ermittelt werden, so wäre die Aufgabe als gelöst zu betrachten, indem sich dann die Linie BC' mit Leichtigkeit berechnen ließe.

Nun führt uns aber die fernere Auflösung der Gleichung auf eine sehr complicirte Gleichung vom dritten Grade, so daß wir räthlicher finden, den Werth von cotg. φ auf indirecte Art zu ermitteln.

Es geschieht dieses nach der sogenannten regula falsi, nach dem wir alle Constante durch ihre Zahlenwerthe ausgedrückt und für den $< \varphi$ zwei verschiedene Werthe angenommen haben werden, wovon der eine den Werth der noch abzuschneidenden Fläche um etwas zu

groß, der zweite den Werth um etwas zu klein ergiebt. Setzen Fig. 48.
wir den ersteren für den Werth $= J'$ und für den Winkel $= \varphi'$;
und den anderen für den Werth $= J''$ und für den Winkel
$= \varphi''$, so erhalten wir den Werth von φ durch folgende Proportion:

$$\varphi - \varphi'' : \varphi' - \varphi'' = J - J'' : J' - J'' \text{ woraus}$$

$$\varphi = \frac{(\varphi' - \varphi'')(J - J'') + (J' - J'')\varphi''}{J' - J''} \text{ abgeleitet wird.}$$

Erhalten wir für φ einen Werth, welcher noch nicht hinreichend genau ist, so wird die Rechnung auf die nämliche Weise fortgesetzt.

Daß dieses Verfahren so mühsam nicht ist, als man nach dieser Darstellnng wohl glauben möchte, wird sich aus einem durchgeführten Beispiel ergeben:

Es sei $J = 21330$ Bonitätstheile $< \alpha = 93°, 00' < \beta = 57° 30'$; $< \gamma = 74° 00'$. $a = 127°$; $b = 143°$; $c = 66°$; folgl. $a + b + c = 336°$; $a + b = 270°$; $m = 1{,}0$; $n = 1{,}4$; $o = 1{,}6$. φ soll vorläufig zu 17° angenommen werden.

Hiernach ist:

$o.(a+b+c)^2$ . .	=	180633,6
$(n-o)(a+b)^2$ . .	=	− 14580,0
$(m-n)a^2$	=	− 6151,6
cotg. 74°	=	0,2867454
cotg. 17°	=	3,2708526
	S'	3,5575980
cotg. 57° 30′	=	0,6370703
cotg. 17°	=	3,2708526
	S'' =	3,9079229
cotg. 93°	=	− 0,0524078
cotg. 17°	=	3,2708526
	S''' =	3,2184448
log. 180633,6 . . .	=	5,2567995
log. S' = log. 3,5576 .	=	0,5511571
	D' =	4,7056424 = lg. 50774

Fig. 48.

$$
\begin{aligned}
-\log.\ 14580\ \ldots\ldots &= 4{,}1637575\\
\log.\ S.'' = \log.\ 3{,}9079\ \ldots &= 0{,}5919434\\
\text{Diff.}'' &= 3{,}5718141 = -\log.\ 3731\\
-\log.\ 6451{,}6\ \ldots\ldots &= 3{,}8096474\\
\log.\ S.''' = \log.\ 3{,}218144 &= 0{,}5076454\\
\text{Diff.}''' &= 3{,}3020020 = -\log.\ 2004.
\end{aligned}
$$

Sonach $2J = 50774 - (3731 + 2004) = 45039$

da $2J$ wirklich . . . . . $= 42660$

so sind zu viel abgeschnitten . . . . . $= 2379$

Setzen wir nunmehr $\varphi = 15^\circ$ und wiederholen die Rechnung, welche sich bloß in Bezug auf die Cotangente dieses Winkels abändert, so erhalten wir für $J'' = 39856$ folglich jetzt zu wenig um 2804.

Wir erhalten sonach jetzt für φ folgenden Werth in Zahlen:

$$\varphi = \frac{2^\circ{,}00 \times 2804 + 15''{,}00 \times 5183}{5183} =$$

$$= \frac{2^\circ{,}00 \times 2804}{5183} + 15^\circ{,}00 = 16{,}08^\circ = 16^\circ, 04', 48'',$$

wenn man den in Graden ausgedrückten Decimalbruch in Minuten und Secunden verwandelt.

Führen wir jetzt die Rechnung nochmals für $\varphi = 16^\circ, 04', 48''$ durch, so stellt sich derselbe folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
\text{cotg. } 74^\circ\ \ldots\ldots &= 0{,}2867454\\
\text{cotg. } 16^\circ, 04', 48''\ \ldots &= 3{,}4691280\\
S.' &= 3{,}7558734\\
\text{cotg. } 57^\circ\, 30',\ \ldots\ldots &= 0{,}6370703\\
\text{cotg. } 16^\circ, 04', 48''\ \ldots &= 3{,}4691280\\
S.'' &= 4{,}1061983\\
\text{cotg. } 93^\circ\ \ldots\ldots &= -0{,}0524078\\
\text{cotg. } 16^\circ, 04', 48''\ \ldots &= 3{,}4691280\\
S.''' &= 3{,}4167202\\
\log.\ 180634\ \ldots\ldots &= 5{,}2567995\\
\log.\ S.' = \log.\ 37559 &= 0{,}5747140\\
\text{Diff.} &= 4{,}6820855 = \log.\ 48093
\end{aligned}
$$

Fig. 48.

— log. 14580 . . = 4,1637575
log. S.'' = log. 4,1062 = 0,6134401

Diff.' = 3,550,3174 = — log. 3551
— log. 6451,6 . . = 3,8096674
log. S.''' = log. 3,4167 = 0,5335179

Diff.'' = 3,2761495 = — log. 1888.

Es ist sonach J''' = 4809 — (3551 + 1888) = 42654 und fehlen sonach nur noch 6 Bonitätstheile. Wenn wir die Rechnung nochmals wiederholen, indem wir jetzt die entsprechenden Werthe für $\varphi = 16°, 04', 48''$ und für J'' = 42654 annehmen, so erhalten wir für

$$\varphi = \frac{(17°,00 - 16°,04',48'')(42660 - 42654)}{45039 - 42654} + 16°\,04'\,48 =$$

$$8'' + 16°\,04',48 = 16°\,04',56.''$$

Es ist nunmehr schließlich:

cotg. 74° . . . = 0,2867454
cotg. 16°, 04', 56 = 3,4686205

S. = 3,7553659

cotg. 57°, 15' . = 0,6370703
cotg. 16°, 04', 56'' = 3,4686205

S.' = 4,1056905

cotg. 93° . = — 0,0524078
cotg. 16°, 04', 56 = 3,4686205

S.'' = 3,4162127

log. 180634 . . = 5,2567995
log. 3,75537 . = 0,5746522

Diff. = 4,6821473 = + log. 48100
— log. 14580 . . = 4,1637575
log. 4,1057 . . = 0,6133872

Diff.' = 3,5503703 = — log. 3551

Fig. 48. $-\log. 6451{,}6 \ . \ . = 3{,}8096674$

$\log. 3{,}4162 \ . \ . = 0{,}5335433$

$\text{Diff.}'' = 2{,}2761241 = -\log. 1889$

Die algebraische Summe dieser drei Posten beträgt + 42660 und ist sonach ganz richtig.

Selbstverständlich hätte diese letzte Rechnung gar nicht mehr geführt zu werden brauchen, indem die Differenz eines Winkels von 8 Sekunden auf dem Lokal nicht zu unterscheiden, also auch nicht zu messen ist. Es ergeben übrigens die Abweichungen in den Bonitätstheilen bei ganz unbedeutender Veränderung des Winkels φ die Nothwendigkeit sehr sorgfältiger Operationen bei Arbeiten dieser Art. Indessen ist nicht zu übersehen, daß wir nicht Morgen, sondern Quadratruthen in Rechnung gezogen haben, wobei die Schwankungen sehr erheblich sind.

Sollten die Bonitätslinien unter sich parallel laufen, was in Waldungen, welche durch Gestelle oder Schneisen in regelmäßige Jagen eingetheilt sind, wohl vorkommen kann, so sind die Winkel α, β u. γ ꝛc. gleich groß und es verwandelt sich der allgemeine Ausdruck für

$$2J = \frac{(a+b+c)^2 . o}{\text{ctg. } \gamma + \text{ctg. } \varphi} + \frac{(a+b)^2 (n-o)}{\text{ctg. } \beta + \text{ctg. } \varphi} + \frac{a^2 (m-n)}{\text{ctg. } \alpha + \text{ctg. } \varphi}$$

in Folgenden:

$$2J = \frac{(a+b+c)^2 . o + (a+b)^2 (n-o) + a^2 . (m-n)}{\text{cotg. } \gamma + \text{cotg. } \varphi} \text{ und}$$

Hieraus wird erhalten $\text{cotg. } \varphi =$

$$= \frac{(a+b+c)^2 o + (a+b)^2 (n-o) + a^2 (m-n) - 2J}{2J} \text{ ctg. } \gamma =$$

$$= \frac{(a+b+c)^2 o + (a+b)^2 (n-o) + a^2 (m-n)}{2J} - \text{ctg. } \gamma.$$

Für diesen Fall läßt sich die Aufgabe ganz kurz algebraisch lösen.

Fig. 49. Man setze Fig. 49 $AD = a$, $DE = b$, $EB = c$, $BX = x$. $EF = y$, $DG = z$ und die correspondirenden Höhen $= h$; h' u. h'',

die Bonitätscoefficienten aber wie früher m, n u. o, so ist $xh''o +$ Fig. 48.
$yh'(n-o) + zh(m-n) = 2J.$

Nun ist aber $x : h'' = y : h' = z : h$, woraus $y = \frac{h'x}{h''}$ und $z = \frac{hx}{h''}$ folgt. Substituirt man für y und z in der obigen Gleichung, so wird $2J = xh''o + \frac{h'^2 x(n-o)}{h''} + \frac{h^2 x(m-n)}{h''}$ und $2J.h'' = x(h''^2.o + h'^2(n-o) + h^2(m-n))$, woraus folgt $x = \frac{2Jh''}{h''^2.o + h'^2(n-o) + h^2(m-n)}$

Es ist aber $h'' = (a+b+c)\ \sin.\ \gamma.$
$h' = (a+b)\ \sin.\ \gamma$
$h = a.\ \sin.\ \gamma$ sonach

$$x = \frac{2(a+b+c)\ J.\ \sin.\ \gamma}{((a+b+c)^2.o + (a+b)^2(n-o) + a^2(m-n))\sin.\ \gamma^2} =$$

$$= \frac{2(a+b+c)\ J}{((a+b+c)^2.o + (a+b)^2(n-o) + a^2(m-n)\ \sin.\ \gamma}$$

in lauter bekannten leicht berechenbaren Größen bekannt.

Weil nun ist $\text{tang.}\ \varphi = \frac{x.\ \sin.\ \gamma}{(a+b+c) - x\ \cos.\ \gamma}$, so folgt hieraus

$$x = \frac{(a+b+c)\ \text{tang.}\ \varphi}{\sin.\ \gamma + \cos.\ \gamma\ \text{tang.}\ \varphi} = \frac{a+b+c}{\sin.\ \gamma.\ \text{cotg.}\ \varphi + \cos.\ \gamma}.$$

Wird dieser Werth in die obige Endgleichung für x substituirt, so erhalten wir $\frac{a+b+c}{\sin.\ \gamma\ \text{cotg.}\ \varphi + \cos.\ \gamma}$

$$= \frac{2(a+b+c)\ J}{((a+b+c)^2.o + (a+b)^2(n-o) + a^2(m-n))\ \sin.\ \gamma}.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung im Zähler mit $(a+b+c)$ und im Nenner mit $\sin.\ \gamma$ dividirt, giebt:

$$\frac{1}{\text{ctg.}\ \varphi + \text{ctg.}\ \gamma} = \frac{2J}{(a+b+c)^2 o + (a+b)^2(n-o) + a^2(m-n)}$$

woraus folgt:

Fig. 48. $\text{cotg. } \varphi = \frac{(a+b+c)^2 . o + (a+b)^2 (n-o) + a^2 (m-n)}{2J} - \text{ctg. } \gamma$

wie oben.

Zweites Verfahren.

Man nehme aus den vorliegenden drei Bonitätsklassen zu 1,0; 1,4 und 1,6 eine mittlere von $\frac{4,0}{3} = 1,333$ und hiernach die ganze abzuschneidende Fläche als gleichwerthig an; berechne dann die durch die provisorische Theilungslinie abgeschnittene Fläche genau, und sehe zu, wie weit man sich der Wahrheit genähert hat. Die vollständige Ausgleichung geschiehet dann im Verhältniß der concreten Flächen und Linien. Das obige Beispiel, nach diesem Verfahren behandelt, soll zur näheren Erläuterung dienen.

Da im vorliegenden Falle 21330 Bonitätstheile oberhalb der Linie AB, welche im Ganzen 336° mißt, abzuschneiden sind, so ergiebt sich die Fläche zu $\frac{21330}{1,333} = 16001,5$ □° und die Höhe des abzuschneidenden Dreiecks $= \frac{2J}{a+b+c} = \frac{32003}{336} = 95,25°$.

Da der Winkel $\gamma = 74°$ mißt, so ergiebt sich die vorläufige Linie $BC = x$, Fig. 48, durch $\frac{95,25}{\text{sin. } 74°}$ zu 99,1°

Um nun die Dreiecke ADE und AFG berechnen zu können, müssen wir die senkrechten Abstände der Punkte F und D von AB ermitteln, was nach der oben entwickelten Formel

$$DJ = \frac{(a+b)\ d\ \text{sin. } \beta . \text{ sin. } \gamma}{(a+b+c)\ \text{sin. } \beta + d\ \text{sin. } (\gamma - \beta)}$$

auf folgende Art geschiehet:

log. $a+b$ = log. 270 . . .	= 2,4313638
log. d = log. 99,1	= 1,9960737
log. sin. β (57°, 30′)	= 9,9260292
log. sin. γ (74°)	= 9,9828416
S.	= 4,3363083

Fig. 48.

log. (a + b + c) = log. 336 . = 2,5363393
log. sin. β . . . . . = 9,9260292

2,4623685 = log. 283,38
log. d = log. 99,1 . . . . . = 1,9960737
log. sin. (γ − β) = log. sin. 16°, 30′ = 9,4533418

1,4494155 = log. 28,15
= log. 311,35
log. 311,53 . . . . . = 2,4934999

Diff. 1,8428084 = log. JD = 69,63.

Die Höhe des ersten Dreiecks AFG finden wir durch den Ausdruck:

$$FK = \frac{a \cdot d \cdot \sin.\ \alpha \cdot \sin.\ \gamma}{(a + b + c)\ \sin.\ \alpha + d \cdot \sin.\ (\gamma - \alpha)} =$$

$$= \frac{127 \times 99{,}1 \times \sin.\ 93^\circ \times \sin.\ 74^\circ}{336 \cdot \sin.\ 93 - 99{,}1 \cdot \sin.\ 19^\circ\ *)} = 39{,}5.$$

Die Inhalts- und Werthberechnung der Dreiecke ist nun folgende:

1) $\frac{95{,}25\ 0}{2}$ $\quad 47{,}62 \cdot 336 = 16000{,}32 \times 1{,}6 = 25600{,}0;$

2) $\frac{69{,}63\ 0}{2}$ $\quad 34{,}81 \times 270 = 9398{,}70 \times (n - o) = -1879{,}7,$

3) $\frac{39{,}5\ 0}{2}$ $\quad 19{,}75 \times 127 = 2501{,}9 \times (m - n) = -1000{,}8,$

zusammen . . . . . 22719,5.
Es waren abzuschneiden . 21330,0

sonach zu viel abgeschnitten 1389,5.

*) Das zweite Glied im Nenner wird negativ, weil sin. − 19° = − sin. 19°.

Fig. 48. Wir schließen nun folgendermaßen:

$22719{,}5 : 21330{,}0 = 99{,}1 : x$, woraus folgt $x = 93{,}0$.

Es muß nunmehr die Rechnung wiederholt werden, wonach sich folgende Resultate ergeben:

$$CH = 93{,}0 . \sin. 74^\circ \ldots\ldots\ldots = 89{,}45^\circ$$

$$DJ = \frac{270 . 93{,}0 . \sin. 57^\circ, 30'. \sin. 74^\circ}{336 . \sin. 57^\circ, 39' + 94{,}9 . \sin. 16^\circ, 30'} = 65{,}74$$

$$FK = \frac{127 . 93{,}0 . \sin. 93^\circ . \sin. 74^\circ}{336 . \sin. 93^\circ - 93 . \sin. 19^\circ} = 37{,}17.$$

Da bei vorstehenden Rechnungen alle Logarithmen bis auf den von 93,0 bereits bekannt sind, so ergeben sich die Resultate sehr leicht und schnell.

Die Inhalts- und Werthberechnung der einzelnen Dreiecke ergiebt:

$$\frac{89{,}45 \times 336}{2} \times 1{,}6 \ldots\ldots = + 24041.16$$

$$\frac{65{,}74 \times 270}{2} \times - 0{,}2 \ldots\ldots = - 1774{,}98$$

$$\frac{37{,}17 \times 127}{2} \times - 0{,}4 \ldots\ldots = - 944{,}44$$

Die Summe dieser drei Posten ist $= + 21325{,}0$

sie soll sein $\ldots\ldots\ldots = + 21325{,}0$

es fehlen uns sonach $\ldots\ldots\ldots 5{,}0$.

Wir schließen nunmehr so:

Zu $1388 + 5 = 1394$ Bonitätstheilen ist die Linie **BX** um $99{,}1 - 93{,}0 = 6{,}1$ verändert worden, um wieviel wir dieselbe für fünf Bonitätstheile verändert werden müssen, oder:

$$1394 : 5{,}0 = 6{,}1 : x = 0{,}02;$$

wir geben sonach der Linie **Bx** eine Länge von 93,02 und sehen die Aufgabe als hinlänglich genau gelöst an.

Um uns nun zu überzeugen, wie weit wir uns durch diese Berechnungsart dem ersten Verfahren, wobei wir von dem Winkel

φ am Fuße der Theilungslinie ausgegangen sind, genähert haben, Fig 48.
so wollen wir nunmehr noch den Winkel φ durch den bekannten Ausdruck

$$\text{tang. } \varphi = \frac{C'X}{AX} = \frac{93{,}02.\ \sin. 74^\circ}{336 - 93{,}02.\ \cos. 74^\circ} = 16^\circ, 04' 20''$$

entwickeln, während wir dort 16°, 04′ 56″ gefunden haben. Diese Abweichung ist nicht in dem Verfahren, sondern in den Decimalen zu suchen. Berechnen wir uns aus dem $< \varphi$ die gegenüberstehende Seite, so erhalten wir:

$$Bx = \frac{(a + b + c)\ \sin. \varphi}{\sin. (\varphi + \gamma} = \frac{336.\ \sin. 16^\circ, 04', 56}{\sin. 90^\circ, 04', 56''} = 93{,}08$$

mithin um 6 Zolle größer, als wir dieselbe nach dem zweiten Verfahren gefunden haben.

Drittes Verfahren.

Es hätte die Aufgabe auch dadurch gelöst werden können, daß man die verschiedenen Bodenwerthe auf einen gemeinschaftlichen geometrischen Werth reducirt, hieraus die abzutheilende Fläche ermittelt und den Werth für

$$\text{cotang. } \varphi = \frac{b^2}{2J} - \text{cotang. } \alpha \text{ berechnet hätte.}$$

Es kommt hiernach nur auf eine richtige Reduktion der verschiedenen Bodenwerthe an, welche auf folgende Art vollzogen werden kann.

Es sei Fig. 50 das Dreieck GAG′ ein sehr kleines, strenge Fig.50.
genommen ein unendlich kleines, so daß die Trapezoide CEE′C′ und EE′G′G für Trapeze und resp. Parallelogramme angesehen werden können.

Es ist sodann der Inhalt des Dreiecks $ACC' = AC.BB'$, der Inhalt der Fläche $CC'EE' = CE \times DD'$ und der Inhalt der Fläche $EGGE' = EG.FF'$, vorausgesetzt, daß die Höhen BB′, DD′ und FF′ in der Mitte der betreffenden Grundlinien genommen sind. Diese Flächen mögen ihre bisherigen Bodenwerthe m, n und resp. o behalten.

Es sei nun die Fläche AUU′ die auf die gemeinschaftliche Bonität reducirte; ihr Inhalt $= \frac{AU.UU'}{2} = \frac{x.UU'.}{2}$

Fig.50.

Setzen wir nun $BB' = \frac{1}{p} AC$, so ist wegen Aehnlichkeit der Dreicke ACC', ADD', AFF' und AUU'.

$AB : BB' = AD : DD' = AF : FF' = AU : UU'$. Da nun $BB' = \frac{1}{p} AB$, so ist $DD' = \frac{1}{p} \frac{AB . AD}{AB} = \frac{1}{p} AD$; $FF' = \frac{AB . AF}{p . AB} = \frac{AF}{p}$ und $UU' = \frac{1}{p} AU = \frac{1}{p} x$. Nennen wir nun den gemeinschaftlichen Bodenwerth $= \omega$, so ist der Werth des verzeichneten sehr kleinen Dreiecks

$$AGG' = \frac{AC . AB}{p} . m + \frac{CE . AD}{p} n + \frac{EG . AF}{p} . o$$

und diese Werthe müssen gleich sein, dem Werthe des Dreiecks

$$AUU' = \frac{x^2}{2p} \omega.$$

Da der gemeinschaftliche Faktor $\frac{1}{p}$ ausgestrichen werden kann, so ergiebt sich der Werth von x, nämlich die Grundlinie des auf gemeinschaftlichen Werth reducirten Dreicks AUU' durch folgenden Ausdruck:

$$x = \sqrt{\frac{m . AC . AB + n . CE . AD + o . EG . AF}{\frac{1}{2} \omega}}.$$

Da $AC = a$; $AB = \frac{1}{2} a$; $CE = b$; $AD = a + \frac{1}{2} b$; $EG = c$; $AF = a + b + \frac{1}{2} c$ alle bekannt sind, so läßt sich der Werth von x leicht berechnen. Denkt man sich die ganze Fläche in lauter unendlich kleine Dreiecke zerlegt und für jedes die Grundlinie AU, AU' ꝛc. gesucht, so ergiebt sich zuletzt ein — sanft bogiges — Dreieck AUY, welches von gleichem Werthe wie die ganze aus den verschiedenen Bodenwerthen m, n, o bestehende Fläche AGT ist.

Wir wollen dieses Verfahren durch das alte Beispiel erläutern und zusehen, wie die Resultate mit denen den obigen Verfahrungsarten übereinstimmen.

Es sei $AC = a = 127$; $CE = b = 143$: $EG = c = 66$; sonach $a + b = 270$ und $a + b + c = 336$.

$\sphericalangle A = 30°$; $\sphericalangle \alpha = 93°$; $\sphericalangle \beta = 57°, 30'$; $\sphericalangle \gamma = 74°$. Fig. 50.

$m = 1{,}0$; $n = 1{,}4$; $o = 1{,}6$. ω wollen wir für 1,5 setzen *). Auf der gegenüberstehenden Seite sei $AP = 151{,}2$; $PR = 76{,}8$ und $RT = 105$, so wird $AO = 75{,}6$; $AQ = 189{,}6$ und $AS = 283{,}5$.

Die Berechnung von x geschiehet jetzt auf folgende Art:

$AC \cdot AB \cdot m = 127 \times 63{,}5 \times 1{,}0 = 8064{,}5$
$CE \cdot AD \cdot n = 143 \times 198{,}5 \times 1{,}4 = 39739{,}7$
$EG \cdot AF \cdot o = 66 \times 303{,}0 \times 1{,}6 = 31996{,}8$

Sma. $79801{,}0 : \frac{1}{2}\omega = 0{,}75 = 106401$

und hieraus die Quadratwurzel extrahirt giebt $AU = 326{,}2$.

$AP \cdot AO \cdot m = 151{,}2 \times 75{,}6 \times 1{,}0 = 11430{,}7$
$PR \cdot AQ \cdot n = 76{,}8 \times 189{,}6 \times 1{,}4 = 20385{,}8$
$RF \cdot AS \cdot o = 105{,}0 \times 279{,}0 \times 1{,}6 = 46872{,}0$

Sma. $78688{,}5 : \frac{1}{2}\omega = 0{,}75 = 104918$

und $\surd 104918 = 324{,}0 = AX$.

Wir wollen es bei Berechnung dieser zwei Linien belassen und das Dreieck AUX als ein geradlinichtes ansehen.

Es waren im Ganzen 21330,0 Bonitätstheile abzuschneiden und hierzu bedarf es einer Fläche von $\frac{21330}{1{,}5} = 14220 \square°$, welche von dem Dreieck AUX zu entnehmen sind.

Berechnen wir den Theilungswinkel φ, so ergiebt sich dieser durch die Formel $\text{cotang. } \varphi = \frac{AU^2}{2J} - \text{cotang. } \alpha = \frac{326{,}2^2}{28440} -$ cotang. $74° = \frac{106406}{28440} - 0{,}2751330 = 3{,}4663033$, welche Zahl der Cotangente von 16°, 05′ entspricht. Wir dürfen also nur von

*) Es hängt von der Bestimmung des Werthes ω ab, ob die auf gemeinschaftliche Bonität zu reducirende Fläche kleiner oder größer als die wirkliche Fläche werden soll, ist nämlich ω größer als das geometrische Mittel der verschiedenen Bodenwerthe, so wird die reducirte Fläche kleiner, und umgekehrt wird dieselbe größer als die wirkliche Fläche.

Fig. 51. dem Punkte A aus, die Linie AN unter einem Winkel von GAN = 16°, 05' abſtecken und aufhauen laſſen, um der Aufgabe Genüge geleiſtet zu haben.

Wer etwa noch zweifeln ſollte, ob die Aufgabe durch dieſes ſehr einfache Verfahren auch richtig gelöſt ſei, möge zur Controle die Linie UX aus den bekannten zwei Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel zu 168°, ſodann den Winkel AUX = 74°, 38' und die Höhe des abzuſchneidenden Dreiecks zu 87,2 berechnen und dann die Linie UW = 90,4 finden. Weil nun UX mit GF ſehr nahe parallel läuft, ſo läßt ſich GN durch die Proportion

$$326{,}2 : 336{,}0 = 90{,}4 : x = 93{,}1$$

berechnen, während wir dieſelbe früher zu 92,08, ſonach mit 2 Zoll Abweichung gefunden haben.

III. Zum Schluſſe wollen wir noch einer ganz beſonderen Aufgabe gedenken, welche zwar nicht häufig vorkommt, jedoch vorkommen kann und wegen ihrer Eleganz eine beſondere Behandlung verdient.

Es ſei ABCDEFGHJ, Fig. 51, eine Waldfläche, welche durch die Linieu KLMD in zwei verſchiedene Betriebsklaſſen zerfällt. Die nördlich gelegene Betriebsklaſſe enthalte beiſpielsweiſe Buchen-Hochwald, die ſüdlich gelegene Betriebsklaſſe enthalte Eichen-Schälwald. Dieſer Wald ſoll durch eine gerade Linie der Art getheilt werden, daß die Theilſtücke ein gegebenes Verhältniß zu einander haben, z. B. daß jeder Theil eine gleiche Fläche von jeder Betriebsklaſſe enthalte.

Es wird vorausgeſetzt, daß der ganze Wald ſowohl, als deſſen zwei Betriebsklaſſen polygonometriſch vermeſſen und berechnet ſind.

Man beginne das Theilungsverfahren damit, daß man diejenigen äußeren Grenzlinien zu ermitteln ſucht, in welche die Theilungslinie einſchneiden wird, was nicht ſchwierig zu vollziehen iſt, indem von allen äußeren und innern Grenzpunkten die Ordinaten und Abſciſſen bekannt ſind. Wir berechnen ferner die in jedem Betriebsklaſſenabſchnitt fallenden Betriebsklaſſentheile und reduciren unſere Aufgabe darauf, daß wir das Viereck BCFG, worin alle

Linien und Winkel als bekannt angenommen werden können, derart zu theilen haben, daß jeder Betriebsklassenantheil eine bestimmte Fläche enthalte, welche letztere aus den Grundbedingungen der Aufgabe und den bereits berechneten Betriebsklassen-Antheilen leicht zu finden ist. Fig. 51.

Zur Lösung dieser Aufgabe möge uns die Fig. 52 als Grundlage dienen. Fig. 52.

Man verlängere die Betriebsklassengrenzlinie ef bis sie in die verlängerten äußeren Grenzlinien ab und cd entweder auf einer, oder auf beiden entgegengesetzten Seiten der Figur, hier bei g und h einschneidet. Die Linie gh, welche sich aus den beiden Dreiecken aeg und cfh, sowie aus der Linie ef berechnen läßt, heiße = a; die bekannten Winkel bei g und h mögen mit α und β bezeichnet werden.

Man berechne nun zunächst die $\triangle\triangle$ aeg und cfh aus den bekannten Grundlinien und den an denselben liegenden bekannten Winkeln und heiße die Fläche des ersteren = p, die des letzteren = q.

Wäre die Linie gx = x und der Winkel exi = φ bekannt, so wäre die Aufgabe gelöst und man könnte die Theilungslinie ik ziehen.

$$\text{Es ist } \triangle gxi = \frac{x^2 . \sin. \alpha . \sin. \varphi}{2 . \sin. (\alpha + \varphi)} \ldots = f^2$$

$$\text{und } \triangle kxh = \frac{(a-x)^2 . \sin. \beta . \sin. \varphi}{2 . \sin. (\beta + \varphi)} = g^2$$

Wird in diesen beiden Gleichungen der Sinus der Summenwinkel aufgelöst und dieselben mit dem Produkte der Sinusse des Zählers dividirt, auch für $\frac{\cos.}{\sin.} = \text{cotang.}$ gesetzt, so erhalten wir:

1) $x^2 = 2f^2 (\text{cotang. } \varphi + \text{cotang. } \alpha)$;

2) $(a-x)^2 = 2g^2 (\text{cotang. } \varphi + \text{cotang. } \beta)$.

Wird aus diesen beiden Gleichungen cotang. φ eliminirt, so erhalten wir

3) $g^2 (x^2 - 2f^2 . \text{cotg. } \alpha) = f^2 [(a-x)^2 - 2g^2 . \text{cotg. } \beta]$.

Fig. 52. Aus dieſer Gleichung iſt der Werth von x zu finden, ſonach $g^2x^2 - f^2(a-x)^2 = 2f^2g^2$ (cotang. α — cotang. β) und $x^2(g^2-f^2) + 2af^2x - a^2f^2 = 2f^2g^2$ (cotg. α — cotg. β)

$$\text{Da cotang. } \alpha - \text{cotang. } \beta = \frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha} - \frac{\cos.\beta}{\sin.\beta}$$

$$\frac{\sin.\beta.\cos.\alpha - \sin.\alpha.\cos.\beta}{\sin.\alpha.\sin.\beta} = \frac{\sin.(\beta-\alpha)}{\sin.\alpha.\sin.\beta}$$

ſo iſt auch

$$x^2 + \frac{2af^2}{g^2-f^2}x = \frac{a^2f^2}{g^2-f^2} + \frac{2f^2g^2\sin.(\beta-\alpha)}{(g^2-f^2)\sin.\alpha.\sin.\beta}.$$

Wird das Quadrat auf der linken Seite der Gleichung vervollſtändigt und die Wurzel ausgezogen, ſo erhalten wir

$$x + \frac{af^2}{g^2-f^2} = \sqrt{\frac{a^2f^2}{g^2-f^2} + \frac{2f^2g^2.(\sin.\beta-\alpha)}{(g^2-f^2)\,sn.\alpha.\,sn.\beta.} + \left(\frac{af^2}{g^2-f^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{g^2-f^2}\sqrt{a^2f^2g^2 + 2\frac{(g^2-f^2)f^2g^2.\sin.(\beta-\alpha)}{\sin.\alpha.\sin.\beta}}$$

und

$$4)\quad x = -\frac{af^2}{g^2-f^2} \pm \frac{1}{g^2-f^2}\sqrt{a^2f^2g^2 + 2\frac{(g^2-f^2)f^2g^2.\sin.(\beta-\alpha)}{\sin.\alpha.\sin.\beta}}$$

$$= \frac{a}{g^2-f^2}\left(-f^2 \pm \sqrt{g^2f^2 + 2\frac{(g^2-f^2)f^2g^2\sin.\beta-\alpha}{a^2.\sin.\alpha.\sin.\beta}}\right.$$

Hat man auf dieſe Art x gefunden, ſo iſt cotang. $\varphi = \frac{x^2}{2f^2}$ − cotang. α aus 1.

Hat die Betriebsklaſſengrenzlinie ef eine ſolche Lage, daß ſie die beiden verlängerten Grenzlinien ab und cd auf einer und derſelben Seite ſchneidet, wie dieſes in unſerer Hauptfigur der Fall ſein würde und wie durch die Figur 53 erläutert werden ſoll, ſo bleibt die Auflöſung noch immer dieſelbe. Denn ſetzt man auch hier $gx = x$; $gh = a$, ſo iſt Dreieck $gxi = \frac{x^2.\sin.\alpha.\sin.\varphi}{2\sin.(\alpha+\varphi)}$ und Dreieck

$hxk = \frac{(a+x)^2 . \sin.\beta . \sin.\varphi}{2 . \sin.(\beta+\varphi)}$. Es verändert sich also bloß in Fig. 53.
dem Ausdruck für g^2 das Zeichen für x und alles übrige bleibt unverändert.

Sollten die beiden Seiten ab und cd des Vierecks parallel laufen, so wäre $\alpha = \beta$ und $\sin.(\beta - \alpha) = 0$, sonach in diesem Fall x durch den einfacheren Ausdruck gegeben

$$x = \frac{a}{g^2 - f^2}(-f \pm \sqrt{g^2 f^2}.$$

Sollte dagegen die Linie ef mit der einen Seite cd des Vierecks parallel laufen, so wäre jetzt exkd, Fig. 52, ein Parallel-Trapez, Fig. 52.
dessen Höhe $em = h$ leicht zu finden ist, weil man die Linie ed und den Winkel bei d kennt, und es wird das Verfahren in diesem Falle folgende Abänderung erleiten:

Es ist $dm = h . \text{cotang. } d = \frac{h}{\text{tang. } d}$ und

$kn = h . \text{cotang. } k = \frac{h}{\text{tang. } k} = \frac{h}{\text{tang } \varphi}$ sonach für

$ex = x$, $dk = x + \frac{h}{\text{tang. } d} + \frac{h}{\text{tang. } \varphi}$; also ist

$exkd$ oder $R = \frac{h}{2}\left(2x + \frac{h}{\text{tang. } d} + \frac{h}{\text{tang. } \varphi}\right)$ woraus gefunden wird:

$$\text{cotang. } \varphi = 2\frac{(R - hx)}{h^2} - \text{cotang. d.}$$

Es ist aber auch, wenn man $eg = b$ setzt $gx = b + x$ und daher

$$\triangle gix = f^2 = \frac{(b+x^2 . \sin.\alpha . \sin.\varphi}{2 . \sin.(\alpha+\varphi)}$$

woraus nach gehöriger Reduktion hervorgehet:

$$\text{cotang. } \varphi = \frac{(b+x)^2 - 2f^2 . \text{cotang. } \alpha}{2f^2}$$

Man erhält also in diesem Falle zwei Werthe für cotang. φ, sonach eine Gleichung, aus welcher sich der Werth von x durch ein ganz ähnliches Verfahren, wie oben eingeschlagen, finden läßt.

Fig. 52. Sollte $f^2 = g^2$ gefunden werden, so erhält man aus der Grundgleichung den Werth von x entweder α oder $\frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt.

In diesem besonderen Falle hat man aber aus den oben abgeleiteten Formeln für f^2 und g^2 die zwei Gleichungen

$$x^2 = 2f^2 \text{ (cotang. } \varphi + \text{ cotang. } \alpha)$$
$$(a - x)^2 = 2f^2 \text{ (cotang. } \varphi + \text{ cotang. } \beta).$$

Ziehet man die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man eine einfache Gleichung, nämlich:

$$-(2ax - a^2) = 2f^2 \text{ (cotang. } \alpha - \text{ cotang. } \beta)$$
$$= \frac{2f^2 \text{ sin. } (\alpha - \beta)}{\text{sin. } \alpha . \text{ sin. } \beta} \text{ und sonach}$$
$$x = +\frac{a}{2} + \frac{f^2 \text{ sin. } (\beta - \alpha)}{\text{sin. } \alpha . \text{ sin. } \beta}, \text{ weil} + \text{sin. } (\alpha - \beta)$$
$$= -(\text{sin. } \beta - \alpha).$$

Fig. 54. Wäre ein Dreieck abc, Fig. 54, auf die vorliegende Art zu theilen, so dürfen die Winkel bei $a = \alpha$ und bei $e = \beta$, sowie die Linie $ae = a$ als bekannt angenommen werden; man setze $ax = x$ und den Winkel bei $x = \varphi$, so ist

$$\triangle exy = \frac{(x - a)^2 . \text{ sin. } \beta . \text{ sin. } \varphi}{2 . \text{ sin. } (\beta + \varphi)} = f^2$$
$$\triangle axz = \frac{x^2 . \text{ sin. } \alpha . \text{ sin. } \varphi}{2 . \text{ sin. } (\alpha + \varphi)} = g^2.$$

Diese Gleichungen weichen von den oben gefundenen nicht ab und werden auf gleiche Art entwickelt und aufgelöst, weßhalb die Formeln auch für diesen besonderen Fall Gültigkeit haben und sonach allgemein sind.

Wir wollen nun unsere Hauptformel durch ein Beispiel erläutern. Es sei der Inhalt:

a) des oberen Theiles der Figur . . . . . = 6326 □°
b) „ unteren „ „ „ . . . . . = 4374 „
sonach der ganzen Fläche . . . . . = 10700 „

Nach Maßgabe der ausgeführten Rechnungen sind durch die zu ziehende Theilungslinie abzuschneiden:

a) vom oberen Theile — Buchen Hochwald — 2490 □° Fig. 52.
b) „ unteren „ — Eichen Niederwald — 1700 „

Die zur Berechnung erforderlichen Linien und Winkel haben sich folgendermaßen ergeben:

ae = 25,00°; cf = 24,00°; Bonitätslinie ef = 113,2°.

Der innere Winkel bei a = 110°, 20'
„ „ „ „ e = 110°, 20'
„ „ „ „ f = 64°, 34,
„ „ „ „ c = 83°, 00'.
Es ist sonach $< \alpha = 40°, 40'$
$< \beta = 18°, 26'$.

Der Inhalt des △ aeg ergiebt sich durch den Ausdruck:

$$\frac{ae^2 . \sin. a . \sin. e}{2 . \sin. (a + b)} = 421,6 \square°$$

der des △ cfh $= \frac{cf^2 . \sin. c . \sin. f}{2 . \sin. (c. + f)} = 816,4 \square°$

die Linie ge $= \frac{ae . \sin. a}{\sin. \alpha} = 35,97°$

„ „ fh $= \frac{ef . \sin. c}{\sin. \beta} = 75,33°$

Hiernach ist △ gxi oder $f^2 = 2490 + 421,6 = 2911,6 \square°$
△ edh $= 4374 + 816,4 = 5194,4 \square°$
dexk = 1700 folglich
△ kxh oder $g^2 = 5194,4 - 1700 = 3490,4 \square°$ und
gh = a = 35,97 + 113,20 + 75,33 = 224,50°.

Unsere Hauptformel war:

$$x = \frac{a}{g^2 - f^2}\left(-f^2 \pm \sqrt{g^2 f^2 + 2\,\frac{(g^2 - f^2)\, f^2 g^2 . \sin. (\beta - \alpha)}{a^2 . \sin. \alpha . \sin. \beta .}}\right.$$

und cotang. $\varphi = \frac{x^2}{2 f^2}$ − cotang. α.

log. g^2 = log. 3490,4 = 3,5428752
log. f^2 = log. 2911,6 = 3,4641317
7,0070069 = log. 10162650

Fig. 52.

log. 2 = ... = 0,3010300
log. $g^2 - f^2$ = log. 578,8 . . . . . = 2,7625285
log. f^2 = log. 2911,6 . . . . . = 3,4641317
log. g^2 = log. 3490,4 . . . . . = 3,5428752
log. sin. $(\beta - \alpha)$ = log. sin. — 22°, 14′ . = 9,5779275 — 10
compl. 2. log. a = compl. log. 224,5 . . = 5,2975674 — 10
compl. log. sin. α = compl. log. sin. 40°, 40′ = 0,1859808
compl. log. sin. β = compl. log. sin. 18°, 26′ = 0,5000367

25,6320778 — 20
= — log. 428625

S. = + . 9734025

Hieraus die Quadratwurzel extrahirt giebt . . 3120
und hiervon f^2 abgezogen mit 2911,6
giebt . . . . . + 208,4

log. 208,4 . . . = 2,3188977
log. a = log. 224,5 = 2,3512163
compl. log. $g^2 - f^2$ = 7,2374715 — 10

11,9075855 — 10 = log. x folglich

x = 80,83° und die Linie ex = 80,83 — 35,97 = 44,86°

2 log. x . . = 3,8151810
compl. log. 2 = 9,6989700 — 10
compl. log. f^2 = 6,5358683 — 10

20,0500093 — 20 = log. 1,12204
cotang. 40°, 40′ = 1,16397

Diff. — 0,04193 =

cotang. 87°, 36′ folglich φ = 180° — 87°, 36′ = 92°, 24′.

Wenn man also von e aus gegen f, 44,86° abmißt und daselbst den $< \varphi$ = exi = 92°, 24′ ausſteckt, ſo giebt deſſen Richtung die Richtung der Theilungslinie an.

Die Probe für die Richtigkeit der Formel iſt folgende:

$$f^2 = \frac{x^2 . \sin. \alpha . \sin. \varphi}{2 . \sin. (\alpha + \varphi)} \text{ und } g^2 = \frac{(a - x)^2 . \sin. \beta . \sin. \varphi}{2 . \sin. (\beta + \varphi)}$$

2. log. x . . . . . = 3,8151452 Fig.48.
log. sin. α . . . . . = 9,8149192 — 10
log. sin. φ . . . . . = 9,9996189 — 10
compl. log. 2 . . . . = 9,6989700 — 10
compl. log. sin. $(\alpha + \varphi)$ = 0,1363443

33,4649976 — 30 = log. 2911,4 □°
soll sein = . . 2911,6 □°

2. log. (a — x) . . . = 4,3147322
log. sin. β . . . . . = 9,4999633 — 10
log. sin. φ . . . . . = 9,9996189 — 10
compl. log. 2 . . . . = 9,6989700 — 10
compl. log. sin. $(\beta + \varphi)$ = 0,0293654

33,5426498 — 30 = log. 3488,6 □°
soll sein . . 3490,4 □°

Erſter Nachtrag.

(Zu §. 6, Seite 55.)

Von einem praktiſchen Geometer, welchem die Aushängebogen Fig.15.
dieſer Schrift mitgetheilt worden waren, wurde dem Verfaſſer der Einwurf gemacht, daß die am Schluſſe des §. 6 dem Leſer überlaſſene direkte Ableitung eines Ausdruckes für den zuletzt behandelten Fall aus der vorgelegten Figur zu ſchwierig ſei und deßhalb hätte gegeben werden ſollen, zumal kein ihm bekanntes Lehrbuch dieſelbe enthalte. Es veranlaßt dieſes nachträglich zu folgender Behandlung dieſes ſpeciellen, zugleich lehrreichen Falles.

Denke man ſich in Fig. 15 die unbekannte Linie CD = z, an deren Endpunkten die Winkel DCB = α, ACD = β, BDC = γ und CDA = δ gemeſſen worden ſind, vorläufig als bekannt und die bekannte Linie AB = a als unbekannt, ſo ergiebt ſich aus dem △ ACD, oder Seite $AD = \frac{z.\ \sin.\ \beta}{\sin.\ (\beta + \delta)}$ und aus

Fig. 52. dem $\triangle$ BCD die Seite $BD = \frac{z.\ \sin.\ \alpha}{\sin.\ (\alpha + \gamma)}$. In dem $\triangle$ ABD haben wir zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, weßhalb

$BD + AD : BD - AD = \text{tang.}\ \frac{1}{2}(A+B) : \text{tang.}\ \frac{1}{2}(A-B)$

$\text{tang.}\ \frac{1}{2}(A-B) = \frac{BD-AD}{BD+AD}.\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}(A+B)$. Setzt man

für $\frac{A+B}{2}$ seinen Werth $= 90 - \frac{\gamma+\delta}{2} = \mu$ und für $\frac{A-B}{2} = \varphi$,

so ist $B = \mu - \varphi$ und $A = \mu + \varphi$; für BD und AD ihre bereits gefundenen Werthe, so ist

$$\text{tang.}\ \varphi = \frac{\frac{z.\ \sin.\ \alpha}{\sin.\ (\alpha+\gamma)} - \frac{z.\ \sin.\ \beta}{\sin.\ (\beta+\delta)}}{\frac{z.\ \sin.\ \alpha}{\sin.\ (\alpha+\gamma)} + \frac{z.\ \sin.\ \beta}{\sin.\ (\beta+\delta)}}.\ \text{tang.}\ \mu.$$

Dividiren wir im Zähler und Nenner mit dem ersten Gliede des Nenners und streichen z aus, so ist

$$\text{tang.}\ \varphi = \frac{1 - \frac{\sin.\ \beta.\ \sin.\ (\alpha+\gamma)}{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ (\beta+\delta)}}{1 + \frac{\sin.\ \beta.\ \sin.\ (\alpha+\gamma)}{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ (\beta+\delta)}}\ \text{tang.}\ \mu.$$

setzen wir $\frac{\sin.\ \beta.\ \sin.\ (\alpha+\beta)}{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ (\beta+\delta)} = \text{tang.}\ \psi$, so ist

$$\text{tang.}\ \varphi = \frac{1 - \text{tang.}\ \psi}{1 + \text{tang.}\ \psi}.\ \text{tang.}\ \mu = \text{tang.}\ (45^\circ - \psi).\ \text{tang.}\ \mu.$$

Schließlich ist im $\triangle$ ABD, $\sin.\ (\gamma + \delta) : a = \sin.\ (\mu + \varphi) : BD$

$$a = \frac{BD.\ \sin.\ (\gamma+\delta)}{\sin.\ (\mu+\varphi)} = \frac{z.\ \sin.\ \alpha.\ \sin.\ (\alpha+\delta)}{\sin.\ (\alpha+\gamma)\ \sin.\ (\mu+\varphi)}$$

und $$z = \frac{a.\ \sin.\ (\alpha+\gamma)\ \sin.\ (\mu+\varphi)}{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ (\gamma+\delta)}.$$

Man siehet also, daß es ganz gleichgültig ist, ob man die Anschlußwinkel an der bekannten Linie a, oder an der unbekannten z mißt. Wir wollen nunmehr das oben §. 6 für diesen Fall gegebene Beispiel nach dieser Formel behandeln:

Dort war: $a = 5748' < \alpha = 63°, 54'$; $< \beta = 58°, 30'$; $< \gamma = 44°, 06'$; $< \delta = 54°, 54'$. Fig. 52.

Es ist $\operatorname{tang.} \varphi = \dfrac{\sin. 58°, 30'. \sin. 108°, 00'}{\sin. 63°, 54'. \sin. 113°, 24'}$.

log. sin. 58°, 30′ . . .	= 9,9307658
log. sin. 108°, 00′ . . .	= 9,9782063
compl. log. sin. 63°, 54′ .	= 0,0467103
compl. log. sin. 113°, 24′ .	= 0,0372734
	9,9929558 =

log. tang. 44°, 32′, 07″ und tang. $(45 - \varphi)$ = tang. 0°, 27′, 53″

Es ist

log. tang. 0°, 27′, 53″ .	= 7,9090787
log. tang. 40°, 30′ . .	= 9,9314989
	7,8405776 =

log. tang. φ und $\varphi = 0°, 23', 50''$

$$z = \frac{5748. \sin. 108°, 00. \sin. 40°, 53', 50''}{\sin. 63°, 50'. \sin. 99°, 00}$$

log. 5748	= 3,7595168
log. sin. 108°, 00′ . .	= 9,9782063
log. sin. 40°, 53′, 50″ .	= 9,8160450
compl. log. sin. 63°, 54′	= 0,0467103
compl. log. sin. 99°, 00′	= 0,0053801
Sma.	= 3,6058585 = log. 4035,1.

Hätte man BD und AD verwechselt und die kleinere vorangesetzt, so würde man

tang. $\varphi = 45°, 27', 53''$ und $\varphi = -0°, 27', 53''$,

sonst aber die Linie z ganz richtig gefunden haben.

Der negative Winkel φ zeigt nur an, daß der als größer angenommene Winkel B der kleinere und A der größere ist, weil $BD > AD$.

Fig. 15. Ohne Hülfswinkel kann diese Aufgabe folgendermaßen gelöst werden:

Es ist $a^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD.AD \cos.(\gamma + \delta)$ wie aus der Trigonometrie bekannt ist.

Werden die Werthe für BD und AD substituirt, so ist

$$a^2 = \frac{z^2 \sin.\alpha^2}{\sin.(\alpha+\gamma)^2} + \frac{z^2 \sin.\beta^2}{\sin.(\beta+\delta)^2} - \frac{2z.\sin.\beta}{\sin.(\beta+\delta)} \cdot \frac{z.\sin.\alpha}{\sin.(\alpha+\gamma)} \cos.(\gamma+\delta)$$

z^2 als gemeinschaftlichen Faktor genommen und die Brüche unter einem Nenner, diesen aber auf die erste Seite der Gleichung gebracht, giebt

$a^2 \sin.(\alpha+\gamma)^2 . \sin.(\beta+\delta)^2 . \sin.(\beta+\delta) \sin.(\alpha+\gamma) =$

$z^2 (\sin.\alpha^2 . \sin.(\beta+\delta)^2 \sin.(\alpha+\gamma) . \sin.(\beta+\delta) + \sin.\beta^2 \sin.(\alpha+\gamma)^2 \sin.(\alpha+\gamma) \sin.(\beta+\delta) - 2 \sin.\alpha . \sin.\beta \sin.(\alpha+\gamma) . \sin.(\beta+\delta) \cos.(\gamma+\delta)$

Mit $\sin.(\alpha+\gamma) . \sin.(\beta+\delta)$ auf beiden Seiten dividirt, giebt

$$z^2 = \frac{a^2 \sin.(\alpha+\gamma)^2 \sin.(\beta+\delta)^2}{\sin.\alpha^2 . \sin.(\beta+\delta)^2 + \sin.\beta^2 . \sin.(\alpha+\gamma)^2 - 2 \sin.\alpha \sin.\beta . \sin.(\alpha+\gamma) \sin.(\beta+\delta) \cos.(\gamma+\delta)}$$

$$z = \frac{a . \sin.(\alpha+\gamma) . \sin.(\beta+\delta)}{\sqrt{\sin.\alpha^2 \sin.(\beta+\delta)^2 + \sin.\beta^2 . \sin.(\alpha+\gamma)^2 - 2 \sin.\alpha . \sin.\beta . \sin.(\alpha+\gamma) \sin.(\beta+\delta) \cos.(\gamma+\delta)}}$$

Nach dieser Formel stellt sich die Rechnung folgendermaßen:

Zähler:

log. 5748 . . . = 3,7595168
log. sin. 108°, 00′ = 9,9782063
log. sin. 113°, 24′ = 9,9627266
Sma. = 3,7004497.

Nenner:

log. sin. 63°, 54′ = 9,9532897
log. sin. 113°, 24′ = 9,9627266
0,9160163 — 1
2
1,8320326 — 2 = log. 0,67926

log. sin. 58°, 30′ = 9,9307658
log. sin. 108°, 00′ = 9,9792063
0,9089721 — 1
2
1,9089442 — 2 = log. 0,65757.

log. 2 . . . . . = 0,3010300 Fig.15.
log. sin. 63°, 54′ . . = 9,9532897
log. sin. 58°, 30′ . . = 9,9307658
log. sin. 108°, 00′ . . = 9,9782063
log. sin. 113°, 24′ . . = 9,9627266
log. cos. 99°, 00′ = — 9,1943324

0,3203508 — 1 = log. 0,20910

Sma. = 1,54593

$$\log. \frac{1,54593}{2} = \frac{0,1891814}{2} = 0,0945907.$$

log. Zähler = 3,7004497
log. Nenner = 0,0945907

Diff. = 3,6058590 = log. 4035,1

wie oben.

Zweiter Nachtrag.

(Zu §. 12, Seite 104.)

Nach der Correktur des Druckbogens 7 ist es mir gelungen eine zweite Auflösung der sehr wichtigen Aufgabe der Grenzabsteckung bei ungleicher Fläche resp. Bodengüte aufzufinden, welche ich nachstehend noch entwickele.

Man nehme vorläufig an, die ab- und zugehenden Flächen sollten sich im Werthe gleich stehen und berechne nach dem unter Fig.34.
Ziffer 2 gelehrten Verfahren die Linie AH, welche wir mit ω bezeichnet haben. Ist dieses geschehen, und auch die Länge der Grenzlinie GH = S und der Winkel α bei H berechnet, so ermittle man nach dem S. 62 gelehrten Verfahren die Differenz-Ordinate und Differenz-Absciſſe und die Ordinate und Absciſſe vom Punkte z und dann den Flächeninhalt des unteren, links der neuen Grenzlinie liegenden, der Waldfläche zugehen sollenden Stückes HABCz, sowie auch der Controle wegen, den Inhalt des rechts der neuen Grenzlinie liegenden, von der Waldfläche abgehen sollenden Stückes zDEFG.

Fig. 34. Beide Stücke müſſen an Flächeninhalt gleich ſein. Aus x und y von z berechne man auch noch die Länge Hz, welche wir S' nennen wollen.

Nun denke man ſich eine neue Grenzlinie vom Punkte G aus nach der Linie AH gezogen, welche die beiden Flächen A in das Verhältniß m : n bringen ſoll.

Bezeichnet man den kleinen Dreieckswinkel bei G mit φ, ſo iſt der Inhalt des ganzen, zwiſchen den beiden Grenzlinien liegenden Dreiecks nach einem bekannten trigonometriſchen Satze

$$= \frac{S^2 . \sin. \alpha . \sin. \varphi}{2 . \sin. (\alpha + \varphi)}$$

und der Inhalt des oberhalb der Linie CD liegenden Theiles dieſes Dreiecks

$$= \frac{(S - S')^2 . \sin. \alpha . \sin. z}{2 . \sin. (\alpha + z)} = \frac{s^2 . \sin. \alpha . \sin. z}{2 . \sin. (\alpha + z)} \text{ *).}$$

Dieſes letztere Dreieck geht der oberen, vom Walde abzugebenden Fläche zu; die Differenz dieſes und des ganzen Dreiecks aber von der unteren, dem Walde einzuverleibenden Fläche ab, ſo daß man hat:

$$A + \frac{s^2 . \sin. z . \sin \varphi}{2 . \sin. (z. + \varphi)} : A - \left[\frac{S^2 . \sin. \alpha . \sin. \varphi}{2 . \sin. (\alpha + \varphi)} - \frac{s^2 . \sin. z . \sin. \varphi}{2 . \sin. (z + \varphi}\right] =$$

m : n, wo m > als n angenommen iſt. Eine einfache Reduktion dieſer Proportion giebt folgende Gleichung:

$$An + \frac{(n - m)\, s^2 . \sin. \varphi . \sin. z}{2 . \sin. (\varphi + z)} = mA - \frac{mS^2 . \sin. \alpha . \sin. \varphi}{2 . \sin. (\alpha + \varphi)}$$

Wird sin. $(\varphi + z)$ und sin. $(\alpha + \varphi)$ aufgelöſt und mit dem Zähler in den Nenner dividirt, ſo ergiebt ſich

$$2A\,(m - n) = \frac{mS^2}{\text{cotg. } \alpha + \text{cotang. } \varphi} + \frac{(n - m)\, s^2}{\text{cotang. } z + \text{cotg. } \varphi}.$$

Wird der Nenner gleichnamig gemacht und reducirt, ſo erhält man

$$\text{cotg. } \varphi^2 + \text{cotg. } \varphi \left[\frac{(\text{cotg. } \alpha + \text{cotg. } z) - mS^2 - (n - m)\, s^2}{2A\,(m - n)}\right] =$$

$$= \frac{mS^2 . \text{ cotg. } z + (n - m)\, s^2 . \text{ cotg. } \alpha . - \text{cotg. } \alpha . \text{ cotg. } z}{2A\,(m - n)}.$$

*) Nämlich $Gz = S - S' = s$ geſetzt.

Setzt man den Coefficenten von cotg. $\varphi = P$ und den be- Fig.34.
kannten Theil $= Q$, so ist cotg. $\varphi^2 + P$. cotg. $\varphi = Q$ und

$$\text{cotg. } \varphi = \pm\sqrt{Q + {}^1/_4P^2} - {}^1/_2P,$$

wenn man die unreine quadratische Gleichung auflöst.

Aus dem Winkel φ läßt sich der Abstand des Einschnitts-punktes der definitiven Grenzlinie von H oder ω' leicht finden, denn es ist:

$$\frac{S^2.\ \sin.\ \alpha.\ \sin.\ \varphi.}{\sin.\ (\alpha + \varphi)} = \omega'\ S.\ \sin.\ \alpha;\ \text{folglich}\ \omega' = \frac{S.\ \sin.\ \varphi.}{\sin.\ (\alpha + \varphi)}$$

Diese Größe von AH abgezogen giebt ω oder die Entfernung von A bis zum Einschnittspunkt der definitiven Grenzlinie.

Der Werth von cotg. φ ist nicht schwer zu berechnen, und wenn man bedenkt, daß cotg. $\alpha +$ cotg. z, ja selbst cotg. α cotg. z, als verschwindend gegen cotg. φ angesehen werden können, so wird die Rechnung noch um vieles abgekürzt *).

Wir wollen das früher gegebene Beispiel nach dieser Methode behandeln.

Es war $AB = b = 92'$, $BC = c = 101'$, $CD = d = 93'$, $DE = e = 104'$, $EF = f = 80'$ $FG = g = 107'$, sodann $< A = 259°$; $B = 193°$; $C = 237°$; $D = 154°$; $E = 80°$; $F = 194°$.

Die Berechnung der Azimuthe und Coordinaten geschieht in nachstehender Tabelle.

---

*) Die Winkel α und z werden sich meist einer Rechten nähern, während $< \varphi$ stets klein bleiben wird, so lange die Zahlen m und n nicht zu sehr verschieden sind.

Fig. 34.

Stationen.	Winkel gemessene °	'	Neigung °	'	Seiten.	Berechnung u. △y u. y. Logarithmen. a. Sinus. b. Seite.	△ y	Berechnung u. △x u. x. Logarithmen. a. Seite. b. Cosinus.	△ y
A	259	00	259	00		9,9919466	— 90,3	9,2804958	— 17,6
					92	1,9637878	vorh. y=0	1,9637878	vorh. x=0
B	193	00	272	00		1,9557344	y=-90,3	1,2338836	x=-17,6
						9,9997354	— 100,0	8,5427182	+ 3,5
					101	2,0043214	v.y=-90,3	2,0043214	v.x—17,6
C	237	00	329	00		2,0040568	y—191,2	0,5471406	x—14,1
						9,7118393	—47,9	9,9330656	+ 79,7
					93	1,9684829	v.y-191,2	1,9684829	v.x—14,1
D	154	00	303	00		1,6803222	y— 239,1	1,9015485	x + 65,6
						9,9235914	— 87,2	8,7361088	— 56,6
					104	2,0170333	v.y-239,1	2,0170333	v.x+65,6
E	80	00	203	00		1,9406247	y— 326,3	1,7531421	x+ 122,2
						9,5918780	— 31,3	9,9640261	— 73,6
					80	1,9030900	v.y-326,3	1,9030900	v.x+122,2
F	194	00	217	00		1,4949680	y —357,6	1,8671161	x + 48,6
						9,7794636	— 64,4	9,9023486	— 85,4
					107	2,0293838	v.y-357,6	2,0293838	v.x+48,6
G						1,8087474	y— 422,0	1,9317324	x — 36,8

Inhaltsberechnung.

AB.	+ 1.	BC.	— 2.	CD.	— 3.
90,3	45,15	90,3	140,75	191,2	215,15
0	17,6	191,2	3,5	239,1	79,7
	27 090	281,5	70 375	430,3	150 605
	316 05	2	422 25	2	1936 35
	451 5		492,625		15060 5
	794,640				17147,455

DE.	— 4.	EF.	+ 5.	FG.	+ 6.
239,1	282,7	326,3	3419 5	357,6	389,8
326,3	56,6	357,6	73,6	422,0	85,4
565,4	1696 2	683,9	20517 0		1559 2
2	16962	2	102585		19490
	14135		23365		1184
	16000,82		25167,520		33288,92

Zusammenstellung. Fig. 34.

+	−
794,640	492,625
25167,520	17147,455
33288,920	16000,820
+ 59251,080	33640,900
− 33640,90	
Alg. Sma. 25610,180	

Wird mit $\frac{1}{2}y$ oder $\frac{422}{2}$ in diese Fläche dividirt, so ergiebt sich die Grundlinie HK zu 121,4, und wenn dazu x von G mit − 36,8 addirt wird, so ergiebt sich AH = 84,6.

Es ist jetzt tang. $\alpha = \frac{422}{121,4}$ = tang. 73°, 57′ und $AH = \frac{422}{\text{sin. } 73°, 57'} = 439,1$.

Wir haben nunmehr $\triangle y$ und $\triangle x$ vom Punkte z, nach der Seite 62 entwickelten Formel

$$\triangle y = ((o - O) \cos. \beta - (a - A) \sin. \beta). \frac{\cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \beta)}$$

zu berechnen.

In unserem vorliegenden Fall ist

$o - O = o - (-191,2) = + 191,2$
$a - A = + 84,6 - (-14,1) = + 98,7$
α oder Az. C . . . . . = 329°
β oder Az. H . . . . . = 73°, 57′
$\alpha - \beta$ . . . . . = 255°, 03′.

log. 191,2 . . . . = 2,2814879
log. cos. 73°, 57′ = 9,4416576
log. sin. 329° . . = 9,7118393
1,4349948
log. sin. 255°, 03′ = 9,9850452
1,4499396 = log. + 28,18

Fig. 34.

log. 98,7 . . . . . = 1,9945811
log. sin. 73°, 57′ = 9,9827328
log. sin. 329° . . = 9,7118393
1,6891532
log. sin. 255°, 03′ = 9,9850452
1,7041080 = log: + 50,60

$\triangle y = +28{,}18 - 50{,}60 = -22{,}42$ und $\triangle x = \triangle y$ cotg. $\alpha =$
log. 22,42 . = 1,3506356
log. cotg. 329° = 10,2212263
1,5718619 = log. + 37,31.

Es ist ferner:

x von C = — 14,1 y von C = — 191,2
$\triangle$ x von z = + 37,31 ; $\triangle$ y von z = — 22,42
x von z = + 23,21 ; y von z = — 213,62
$\triangle$ x zwischen z u. H = 84,6 — 23,21 = + 61,30

Sodann $S' = \frac{213{,}62}{\text{sin. } 73°, 57'} = 222{,}3$ und sonach $s = S - S' =$
439,1 — 222,3 = 216,8. —

Der Flächeninhalt der untern Fläche ist gleich:

A. B. B. C.
Nr. 1 mit — 794,640, Nr. 2 mit + 492,625;

	C. z.	—	z. H.	+
sodann	191,2	202,41	213,6	106,8
	213,62	37,31	0	61,39
	404,82	202 41	2	96 12
	2	607 23		32 04
		1416 87		10 68
		607 23		64 08
		7551,9171		6556,452

Zusammen 13806,354.

Der Flächeninhalt der oberen Fläche ist gleich:

z D	—	D. E.
213,62	276,36	Nr. 4 mit — 16000,82
239,10	42,39	E. F.
452,72	2037 24	Nr. 5 mit + 25167,530
2	679 08	F. G.
	452 72	Nr. 6 mit + 33288,920
	905 44	
	9595,4004	

G. z.	—		Fig. 84.
422,0	317,8	zusammen 13792,32.	
213,6	60,0		
625,6	19068,00		
2			

Die Abweichungen von 14 □′ liegt in der getrennten Parzelle von G nach z und z nach H. Der arithmetische Mittel beträgt in runder Zahl 138000.

Die Auflösung der Gleichung für cotg. φ geschieht nunmehr auf folgende Art:

Der Winkel z für die untere Figur HABCz ergiebt sich durch die Winkelprobe zu 75°,03′; dessen Supplement = 104°,57, und dieser ist der für das obere Dreieck in Rechnung zu bringende Winkel.

$$\text{cotg. } \alpha = \text{cotg. } 73^\circ,57' \ . \ . \ = +0{,}2876900\ ^*)$$
$$\text{cotg. } z = \text{cotg. } 104^\circ,57' \ . \ . \ = -0{,}2670141$$
$$\text{Sma.} \quad = +0{,}0206659,$$

welche Größe gegen die folgenden füglich vernachlässigt werden kann.

$$m.S^2 \ . \ . \ . \ = +1735279$$
$$(n-m)\,s^2 \ . \ = -\ 47002$$
$$2A(m-n) \ . \ = +\ 27600, \text{ folglich}$$

$$P = -\frac{1735279 + 47002}{27600} = -61{,}17$$

$$\tfrac{1}{2}P = -30{,}585$$
$$\tfrac{1}{4}P^2 = +935{,}442225.$$

$$\log. m S^2 = \log. 1735279 \ . \ . \ = 6{,}2393746$$
$$\log. \text{cotg. } z = \log. \text{cotg. } 104^\circ,57' = 9{,}4265342$$
$$5{,}6659088 = -\text{lg. } 463349$$
$$\log. (n-m)\,s^2 = \log. 47002 \ . \ = 4{,}6721163$$
$$\log. \text{cotg. } \alpha = \log. \text{cotg. } 73^\circ,57' \ = 9{,}4589248$$
$$4{,}1310411 = -\text{lg. } 13522$$

*) Wer keine Tafeln für Cotangenten besitzt, muß den Logarithmus von cotg. 73°,57 aufschlagen und hierzu die Zahl in der Logarithmentafel nehmen.

Fig. 34. log. cotg. z . . . . . = 9,4265342
log. cotg. α . . . . . = 9,4589248
8,8854590 — 10 =
— lg. 0,0768

welches gegen die übrigen Größen vernachläſſigt werden kann.

$$Q = \frac{-463349 - 13522}{27690} = -17,2779.$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2 + Q} = \sqrt{918,1643} = 30,30$$

Hierzu $\frac{1}{2}P$ addirt mit 30,585
Sma. = 60,885 = cotg. φ,

folglich $\varphi = 56', 30''$.

Schließlich iſt $\omega' = \frac{S.\ \sin.\ \varphi}{\sin.\ (\alpha + \varphi)}$

log. 439,1 . . . . = 2,6425634
log. sin. 56', 30' . . = 8,2157550
10,8583184
log. sin. 74°, 53', 30" = 9,9847229
Diff. = 0,8735955 = log. 7,4747

Da AH = 84,6, ſo wird $\omega = 84,6 - 7,47 = 77,13$ und nur um 0,7 Zoll Abweichung von dem Reſultate des erſten Verfahrens, welches mit dieſem auch nicht die entfernteſte Aehnlichkeit hat.

Sollte der untere Theil vergrößert, der obere verkleinert werden, ſo würde ſich das Verhältniß = m : n in das n : m umwandeln und man hätte nur nöthig in der Hauptgleichung überall nS^2 ſtatt mS^2 und $(m - n)\ s^2$ ſtatt $(n - m)$ zu ſetzen. Im Nenner würde m — n ſtehen bleiben. Es ergiebt ſich dieſes, wenn man die Gleichung für dieſen Fall entwickelt.

Druck von C. L. Pfeil in Marburg.

Druckfehler,

welche man von dem Leser zu verbessern bittet.

Seite.	Zeile.	Stehet:	Soll stehen:
6	17 O.	auch „den“ die	auch die
10	19 „	„nur	nun
24	3 „	$\pm$	$\mp$
28		bei den Exempeln Nr. 2 u. Nr. 6 als $\triangle$ x 350,3 u. 286,3	3503 und 2863 ohne Decimalzeichen
31	16 „	die „der“ Winkel	die Winkel
33	9 „	7. b	6. b.
43	2 „	Coordinaten	Ordinaten
45	6 U.	recht	rechts
46	3 „	Im Zähler und Nenner α^n	α
46	1 „	$\frac{+\sin.(\beta^n+\alpha^n)}{+\sin.\alpha^n}$	$\frac{\times(\sin.(\beta^n+\alpha)}{\times\sin.\alpha^n}$
48	5 „	bereits	bereits
50	2 O.	$AD:c=(\alpha+A-x):\sin.\alpha$	$AD:c=\sin.(\alpha+A-x):\sin.\alpha$
50	11 „	$\sin.(\beta+\alpha)$	$\sin.(\beta+x)$
51	7 U.	1642	1624
52	1 „	12,8727727 — 20	12,8727727 — 10
53	1 O.	ebenso	ebenso
55	7 „	$\text{tg.}\frac{1}{2}q.\text{ctg.}(45+\varphi)\frac{\text{tg.}\frac{1}{2}q-\text{tg.}x}{(1+\text{tg.}\frac{1}{2}q).\text{tg.}x}$	tang. $\frac{1}{2}$q. cotg. $(45+\varphi)=$ ꝛc.
57	4 „	im Nenner sin β	sin. α
57	8 „	$\text{tg.}(\frac{1}{2}R-\psi)=\text{tg.}(\psi-\frac{1}{2}R)$	$\text{tg.}(\frac{1}{2}R-\psi)=-\text{tg.}(\psi-\frac{1}{2}R)$
60	5 U.	log. sin. $(\beta+\gamma+\delta)$ log. sin. γ	log. sin. $(\beta+\gamma+\delta)+$log. sin. γ.
60	4 „	log. sin. $(\alpha+\beta+\gamma)$ log. sin. δ	log. sin. $(\alpha+\beta+\gamma)+$log. sin. δ.
62	2 „	$\frac{\sin.\alpha}{\sin.\alpha-\beta}$	$\frac{\sin.\alpha}{\sin.(\alpha-\beta)}$
72	6 „	p = AD =	p — AD =
102	3 „	Punkte d	Punkte e
102	7 „	ꝛc. z. cos. $\delta+$	ꝛc. z. cos. $\delta-$
108	10 „	— g. sin. (D+E+F)	+g. sin. (D+E+F)
110	1 „	= — 234,964	— 237,284
121	9 „	gewonnen	genommen
133	1 O.	Fig. 42.	Fig. 43.
141	9 „	cotg. 78° = 0,21126	cotg. 78° = 0,21256
147	13 „	Fig. 46.	Fig. 48.
154	5 U.	$\frac{-2J}{\quad}$ cotg. γ	$\frac{-2J\text{ cotg. }\gamma}{\quad}$
155	1 O.	Fig. 48.	Fig. 49.
160	2 „	Dreiecke ACC′	Dreieck ABB′
160	7 U.	AUY	AUX

Zu den Figurentafeln.

Fig. 8. Muß bei A links α, rechts β; bei B links α' rechts β'n bei F links α^v rechts β^v stehen.

„ 9. Die vom Punkte C außerhalb des Dreiecks auslaufende Linie muß mit CI bez. werden.

„ 34. Die Fläche ABCzH ist mit M und die Fläche zDEFG mit N zu bezeichnen.

„ 44. Muß der Pfeil an der Südspitze mit S bezeichnet werden.

„ 48. Auf der Linie AC′ müssen die Durchschnittspunkte von FG mit F′ und von DE mit D′ bezeichnet werden.

Aus unſerem Verlag kann durch jede Buchhandlung bezogen werden:

Gerling, Dr. **Chr. F.**, Professor in Marburg, die Pothonotsche Aufgabe in practischer Beziehung dargestellt. Mit einer Kupfertafel. br. 10 Sgr.

Hartmann, Dr. **Jul.**, Gymnaſiallehrer in Rinteln, Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik in den oberen Klaſſen der Gymnaſien. Nach Ohm. br. 15 Sgr.

— — Aufgaben zur Uebung im geometriſchen Zeichnen für die untern Klaſſen der Gymnaſien und Realſchulen. br. 25 Sgr.

Hessel, Dr. **J. F. C.**, Professor in Marburg, Löthrohrtabellen für mineralogische und chemische Zwecke. br. 10 Sgr.

— — Die merkwürdigen arithmetischen Eigenschaften der wichtigsten Näherungsreihe für die Sonnenabstände der Planeten und die ihnen entsprechenden astronomischen Entdeckungen, mit Rücksicht auf die Geschichte dieser Reihe und der auf sie gegründeten Folgerungen. br. 10 Sgr.

Jäger, J. P. E. L., Forſtdirector in Laasphe, das Forſtculturweſen nach Theorie und Erfahrung. br. 2 Rthlr. 15 Sgr.

Koch, Dr. W., Aſſeſſor in Marburg, Deutſchlands Eiſenbahnen. Verſuch einer ſyſtematiſchen Darſtellung der Rechtsverhältniſſe aus den Anlagen und dem Betrieb derſelben. Erſte und zweite Abtheilung. br. 3 Rthlr. 20 Sgr.

(Die dritte (letzte) Abtheilung wird im Auguſt dieſes Jahres erſcheinen).

Kohlrausch, Dr. **B.**, Professor in Erlangen, practische Regeln zur genauern Bestimmung des specifischen Gewichtes. br. 14 Sgr.

Sippel, G. W., Pfarrer, Theorie der Parallelen. Mit 2 lith. Tafeln. br. 6 Sgr.

Stegmann, Dr. F. L., Profeſſor in Marburg, Elemente der ebenen Trigonometrie u. Stereometrie. Mit 3 Figurentafeln. br. 20 Sgr.

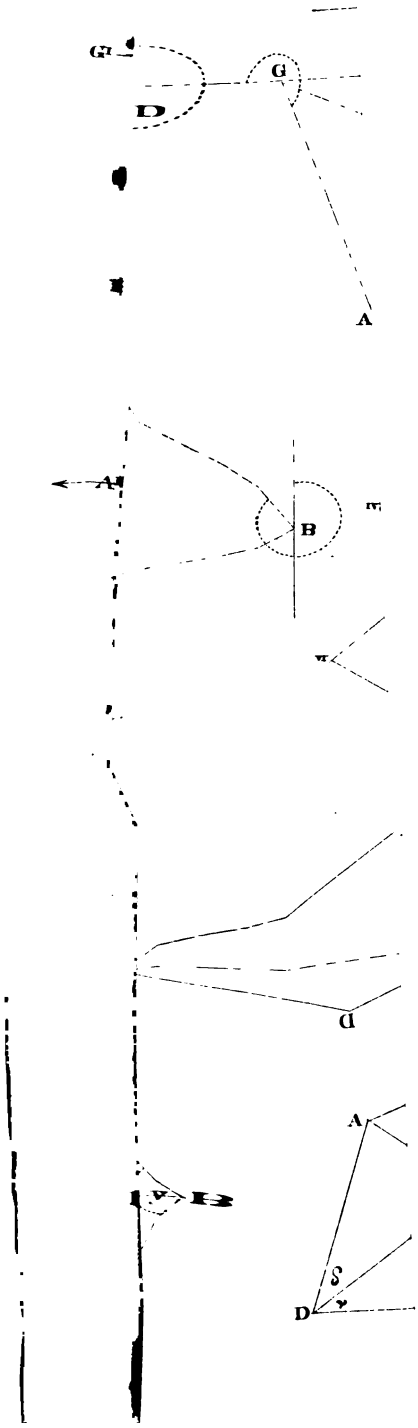
— — geometriſche Unterſuchungen über Drehung. Mit einer Figurentafel. br. 8 Sgr.

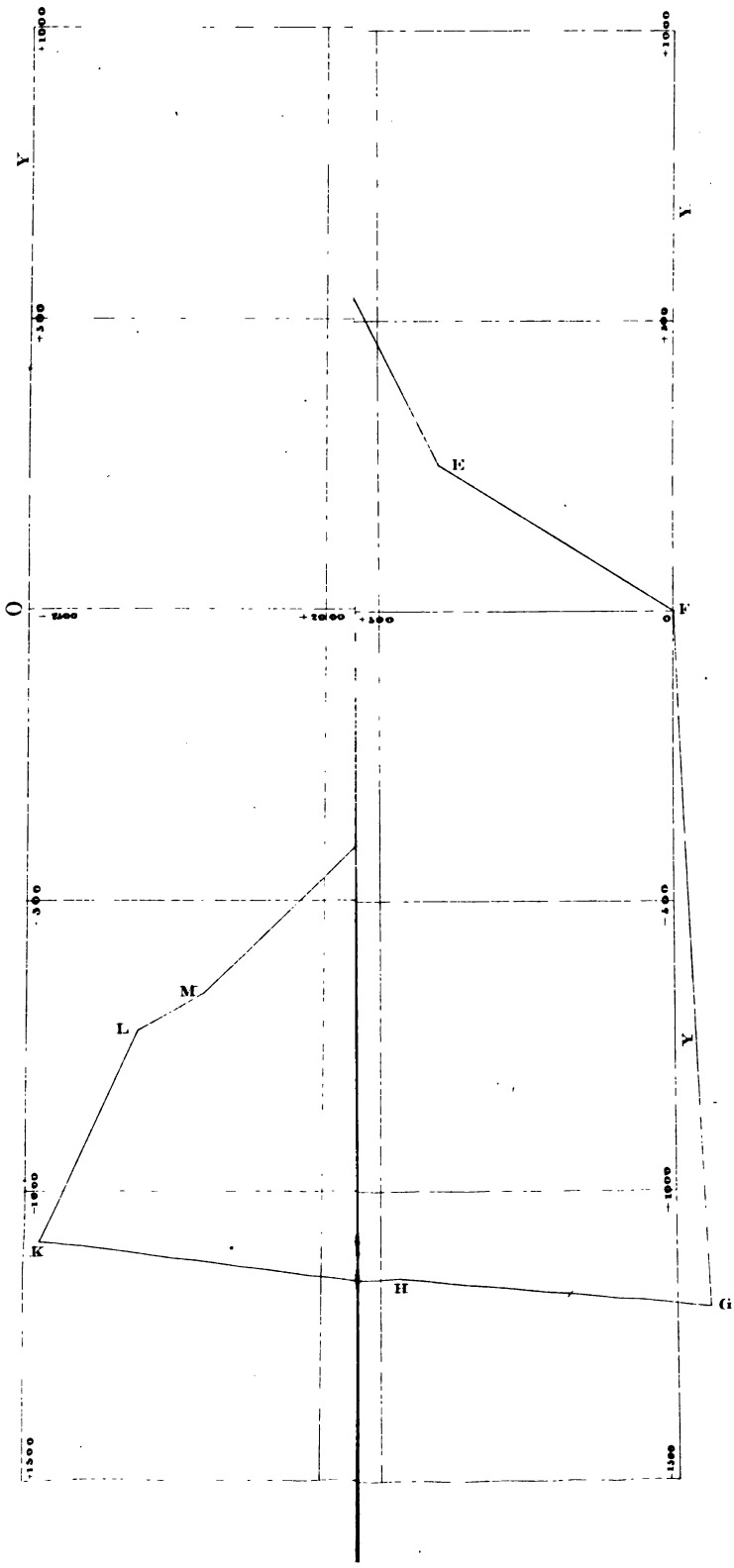
Winkelblech, Dr. **C.**, Professor in Cassel, Elemente der analytischen Chemie. Mit einer Kupfertafel. br. 2 Rthlr. $7\frac{1}{2}$ Sgr.

Marburg, im Juli 1859.

N. G. Elwert'sche Univ.-Buchhandlung.

Fig.3.




E
F
M
L
K
H
G

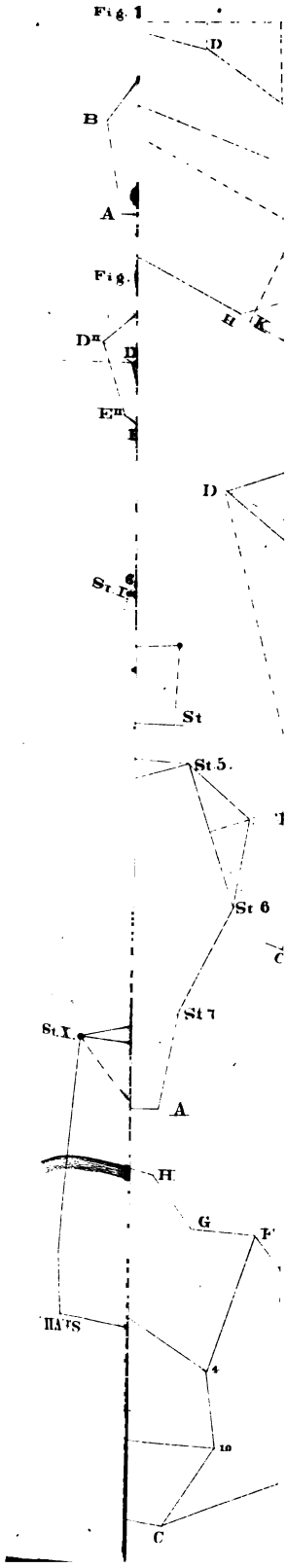


Fig. 1
D
B
A
Fig.
H
K
D''
D
E''
D
St
St 5.
St 6
St 7
St X.
A
H
G
F
4
10
C

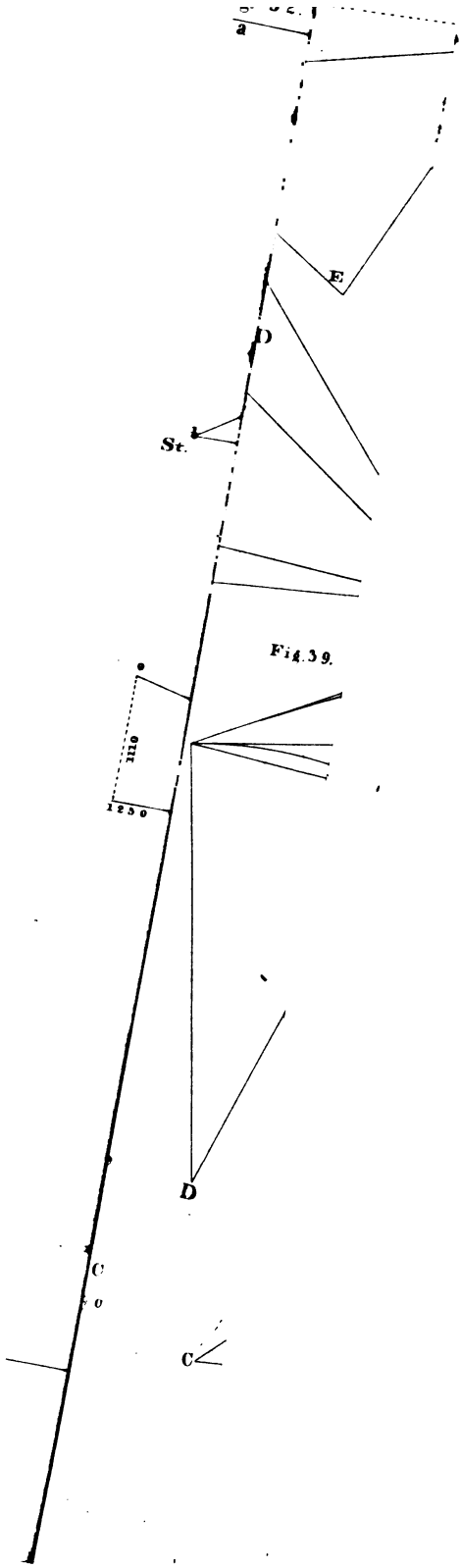
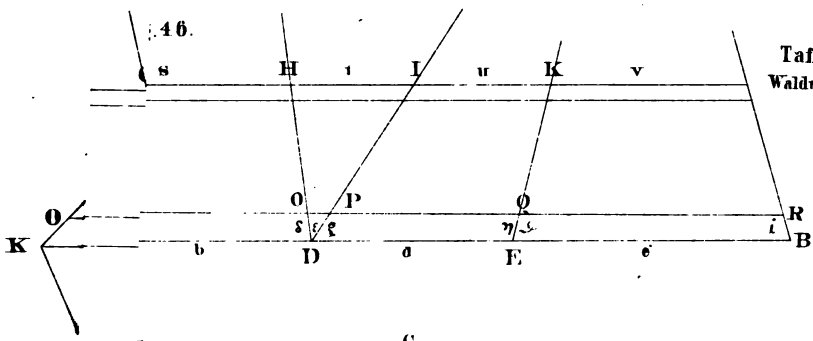


Fig. 39.

Waldtheilung



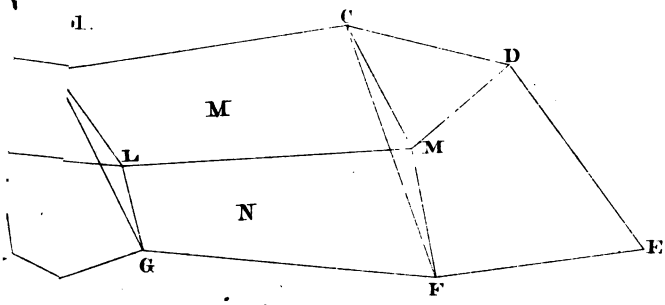


Fig. 50.

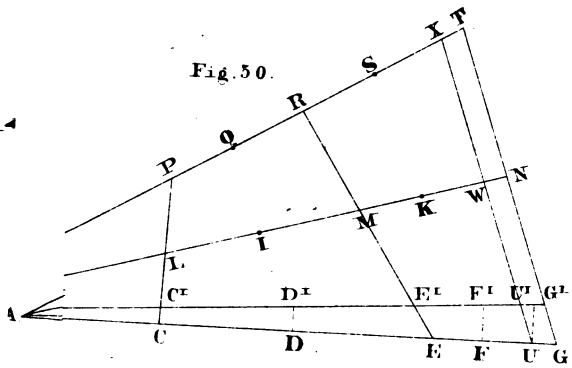
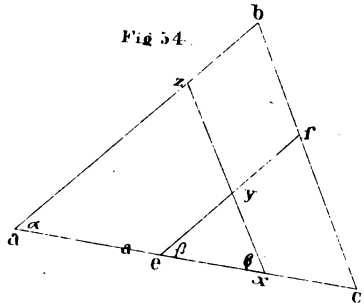
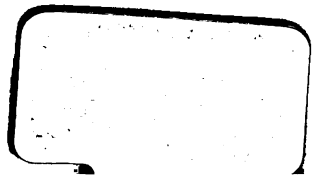
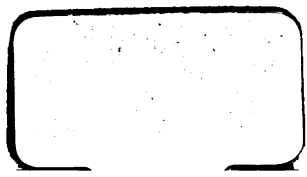
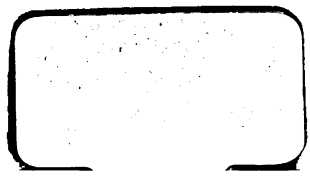



Fig 54.